现代应用数学丛书

李群论

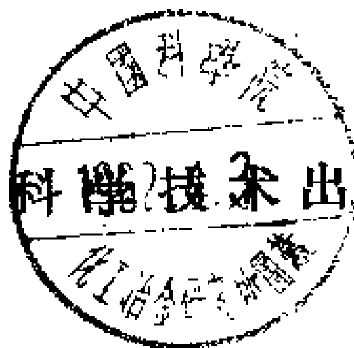
〔日〕岩堀长庆 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

李群論

〔日〕岩堀长庆 著
孙澤瀛 譯
管紀文 校



上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。全书共七章，第一章用拓扑空間的观点介紹流形的概念；第二章介紹李群的一般理論；从第三章开始，叙述李环（李代数）及其表現的理論，对可解李环、半单純李环及单純李环的結构問題作了詳尽的介紹。为了便于讀者对李群理論全貌的了解，在正文前后加了譯者序和校后記，并补充了若干参考文献。本书可供高等学校数学系和物理系师生及有关数学工作者参考。

現代应用数学丛书

李 群 論

原书名 Lie 群 論
原著者 〔日〕岩 堀 长 庆
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 孙 澤 瀛
校 者 管 紀 文

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出 003 号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

开本 850×1168 1/32 印張 7 14/32 字数 177,000
1962年1月第1版 1962年1月第1次印刷
印数 1—10,000

統一书号：13119・445
定 价：（十四）1.25 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"现代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠挚的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

由于原著沒有序言，一开始就介紹內容，可能給讀者了解 Lie 群論的全貌带来一定的困难。为了弥补这一缺陷，譯者試图把 Lie 群論的概况在这里簡單介紹一下。

Lie 群論起源于 Sophus Lie 的連續群論，它是 Lie 在研究求解微分方程时提出来的。当时所指的群是变换群，經过扩大推广之后，目前一般所指的則都是抽象群。

Lie 以毕生精力研究这种群，并且获得了成就。首先，他建立了无穷小变换的概念，使得連續群的理論趋于綫性化。其次，Lie 还研究了在連續变换群下的不变式理論，并把它应用到微分方程論中，成为現代解析力学里通常应用的方法。

此外，Lie 还提出了一种連續变换群的接触变换理論，以后經 Cesáro, Pick, Kowalewski 等人的研究，发展成为自然几何学。同时由于連續群在运动学上的应用，开拓了它对几何学基础理論方面的作用。当研究 Euclid 空間內的立体运动时，若运动的形态不变，則运动組成一个連續群。Lie 完全确定了三維空間的 Euclid 和非 Euclid 运动群中所属的各种子群，以及与这些子群相应的几何学的特征。利用这种对几何学基础理論的貢献，Helmholtz 完成了用运动学观点去描述 Euclid 空間的工作。

Lie 还會經試图引用 Galois 理論，利用开方求解代数方程的方法来求解微分方程，可是他在微分方程方面企图开拓 Galois 理論的愿望并沒有实現。这一工作后来由 Picard 的最初尝試获得了成功，接着 Vissoit 在綫性微分方程方面又建立了这一理論的基础，Drach 以及最近的 Ritt 又利用微分环的理論，用純代数的

方法改进了 Picard-Vissoit 的理論。

到目前,古典的 Lie 群論已經有了很大的发展。首先,变換群已經扩展为抽象群;其次,若把 Lie 的第三基本定理,即构造常数間的代数关系作为 Lie 連續群的特征,那么容易看出,对微分运算子間所施行的微分运算已經轉化为純粹的代数运算。同时,很自然地导出了 Lie 环的概念。

Lie 确定了附属于 Lie 群的 Lie 环所应满足的一組条件,并且指出了滿足这些条件的环必是 Lie 环。这一成就可以說是 Lie 理論中的一个基本成就。Lie 本人是从局部的观点去考虑 Lie 群与 Lie 环間的关系的。随着一般拓扑学的发展,有人认为必須从全局的观点去处理这个問題,于是形成了近代的 Lie 群論。

从近代的观点出发,Lie 群是一个具有抽象群、拓扑空間和流形等三方面結构的有机結合体。

本书是在这种新的、亦即全局的观点之下闡述 Lie 群的。第一章在假定讀者已經具备拓扑空間的概念的基础上介紹流形的概念,作为闡述其他問題的准备。第二章介紹有关Lie 群方面的內容。由于 Lie 群和 Lie 环有着不可分割的联系,所以为了彻底了解 Lie 群的結构,就需要对 Lie 环进行深入的研究。本书从第三章开始介紹 Lie 环方面的內容。

Killing, Cartan 等人在研究 Lie 环方面做了很多工作。Cartan 对于可解 Lie 环、半单純 Lie 环和单純 Lie 环等結构的研究获得了非常丰富的成果。这里要特别指出 Killing-Cartan 定理——Lie 环成为半单純的充要条件是它可以表示成为不可解的单純环的直和。这一定理被认为是 Lie 环之半单純性的判定准則。有了这一判定条件,要决定半单純环的結构,只要把它归結为决定单純环的所有的类型就可以了。Cartan 确定了复数体上单純 Lie 环的所有类型,其結論是除了維数为 14, 52, 78, 133 和 248 等的

特殊单純 Lie 环外，只有四种。以后 Weyl 根据对表現論的研究，巧妙地完成了对复数单純 Lie 环的几何学的分类工作。后来 van der Waerden 与 Дынкин 又把分类理論作了簡化。

因为 Lie 群是拓扑群的一种，所以对它进行研究时，自然要联想到表現論問題。所謂表現，就是指当一个群 G 确定时，为了研究其內在的結构，一般是找出一种已知結构或結构比較簡单的群 H，例如矩陣群，把它拿来和原来的群 G 作比較，也就是用 H 来表現 G，从而研究群 G 的結构。由于 G 是一般的群，而 H 是特殊的群，如果要求 G 和 H 同构那是不大可能的。因此一般只要求比較"粗糙"的同态就可以了。这样，对于群 G 的結构就只能說是"大致"了解。若想准确地了解群 G 的結构，那就必須借助于充分多的表現，以便对 G 作多方面的比較。究竟多到多少才叫充分？就理想而論是希望用表現所成的集能完全确定一个群的結构。我們試作如下考察，对于任意的群，只要將其所有的元素都映射到单位矩陣上，就能得出一种表現，但是这种表現不能单獨起作用，因此 G 的两个互异元素必須映射到互异的矩陣上，这种表現至少要有一个存在。由于表現是同态的，所以上述要求同 G 中不同于单位元素的元素必須映射到不同于单位矩陣的矩陣上的問題是等价的。这种表現存在，我們就称 G 具有充分多的表現。其中表現的存在性是表現論中的首要問題。在一般的情况下，群在上述意义下不存在充分多的表現，因而給一般群的表現論带来了許多困难。不过，当群是致密的，或者是局部致密而又可換时，充分多的表現是存在的。

本书对于半单純 Lie 环的表現論专辟一章討論，对其他 Lie 环理論的說明也是相当詳細的。至于古典的旣成成果，书中基本上都談到了。

但是对于 Lie 群的拓扑結构未曾提及，因此拓扑群中的

Peter-Weyl 定理和跟它有关的各方面以及指标理論、Haar 測度的具体形式等也沒有提到。

另外，拓扑群和 Lie 群的关系問題，书中也未加說明。对于这一內容，拟簡单介紹于下。

如果 G 是一个拓扑群，而且滿足下述条件：

(1) G 的单位元素之某一邻域 U 若和 Euclid 空間中的某一区域成同胚对应，那末对于 U 可以引进坐标，使 U 內一点 x 可以用 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 表示，当 $x, y; xy$ 全都属于 U 时，xy 的坐标可以用 x, y 之坐标的实函数表示，即 $(xy)^i=f^i(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$。一般說来，$f^i$ 是連續的，但未必具有解析的性质。若有

(2) 可以选擇 U 之坐标(不影响拓扑性质)使 f^i 是解析函数，那末 G 就是 Lie 群。由此可見，Lie 群与一般的拓扑群有很大区别。显然，条件(1)是具有拓扑性质的条件，可是条件(2)一般却不能用拓扑的辞句来表达。这样問題就来了，一个滿足条件(1)的群；亦即局部 Euclid 的群是否就是 Lie 群?

这个問題是 Hilbert 列举的 23 个著名問題中的第五个，称之为"Hilbert 第五問題"。这个問題在致密群的情况下由 J. Von Neumann，在可換群的情况下由 Л. С. Понтрягин 分別給予肯定地解决了。Chevalley 又把 Понтрягин 所得的結果扩充到可解群，同样作了肯定的答复。H. Cartan 利用自己对多变数函数論的研究，对复数空間的某种变換群，即所謂拟保角变換群問題也肯定地解决了。Bochner 和拓扑学家 Montigomery 的合作研究，获得很多有关这方面問題的重要結果。但对于一般(例如維数无穷大)的局部致密群，Hilbert 問題似未能解决。

此外，由 H. Cartan 开始，又經 Ehresmann 和陈省身等人研究的 Lie 群和微分几何学基础理論的关系問題；Weyl 利用他的表現論对概周期函数論所作的群論之研究；Jacobson, Brauer,

Landherr, Zassenhaus, Gantmacher 等人在一般体之下所作 Lie 环的純代数結构的研究，以及从 Lie 群的拓扑研究开始，經 Понтрягин, H. Cartan, Freudenthal, Hopf, Ehresmann, Chevalley, Eilenberg 諸人研究而获得的 Lie 环上之同倫 (Cohomology) 理論，都在本书范圍之外，讀者可以另选参考。

由于 Lie 群論牽涉的范圍很广，在一本小册子中要全部包括进去当然是不可能的，实际上也是不必要的。本书例証很多，对 Lie 群的一般理論叙述也比較詳細，有助于理解，是值得向讀者推荐的一本較好的参考书。

最后，由于水平的限制，錯誤和遺漏之处一定不少，望讀者指正。

孙澤瀛

目　录

第1章 流　形

§1 流形的例(球面)

1. 平面

在平面π上規定平行坐标系 Oxy，对于π上每一点 P，确定其坐标(x, y)。如所周知，坐标具有下列性质。

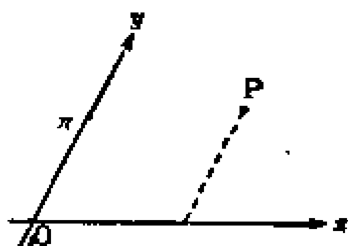


图 1.1

(1) 不同的两个点具有不同的坐标。即設两点P, Q的坐标分别为(x_1, y_1), (x_2, y_2)，那末当 $P\neq Q$ 时，有 $x_1\neq x_2$ 或 $y_1\neq y_2$。

(2) 点列 $\{P_n\}$ 收斂于 P 的必要和充分条件是

$$\lim x_n=x_0, \quad \lim y_n=y_0.$$

这里的(x_n, y_n)是 P_n 的坐标，(x_0, y_0)是 P 的坐标。

(3) 以任意的实数偶 (x, y) 为坐标的点 P 在π内存在。(由(1)知道这样的点 P 是唯一的。)

这样，要知道平面上点的位置，只要曉得它的坐标就行了。象这样地利用坐标来闡述平面的种种性质，这是解析几何学的常識。

如果討論的对象不是平面的全部，而只是其中一部分，比方說，只考虑圓的内部 D，那末 D 内每一点的位置当然可以用坐标表示出来，不过这时必須注意，上述的性质(1)和(2)固然照旧成立，但性质(3)则必須略加修正方能成立。譬如 Oxy 是直角坐标系，区域 D 是在以点 O 为中心，以 r 为半徑的圓的内部的話，那末(3)改为如下形式。

(3)′ 以满足 $x^2+y^2<r^2$ 的任意实数偶 (x, y) 为坐标的点 P 在 D 内(唯一地)存在。

2. 球面

对于球面 S，满足上述性质 (1)，(2)，(3) 的坐标系是否存在呢?回答是否定的。因为这种坐标系如果存在的話，那末球面将和平面同胚(homeomorphic)。但球面具有致密性，而平面则不然，因此产生矛盾。根据同样的理由可知，对于球面，满足(1)，(2)，(3)′ 的坐标系不存在。

注意 以經度、緯度来定球面上一点的位置的方法，不能当做坐标系采用。因为北极与南极的經度不定，不合于坐标的唯一确定性原则。

3. 局部坐标系

誠如上述，对于球面 S 的全体虽不存在坐标系，但若将 S 分割成为两部分 S' 与 S''，那末对于这两部分，满足上述 (1)，(2)，(3)′ 的坐标系是否存在呢? 我們的回答是存在的。例如采取如下的办法就可以：利用空間直交坐标系 (x, y, z)，球面 S 的方程写成

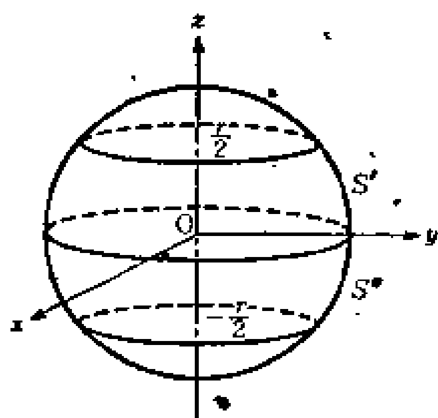


图 1.2

$$S:\quad x^2+y^2+z^2=r^2 \quad (r>0).$$

S 上的两部分 S' 与 S'' 分别以条件

$$S':\quad 2z>-r, \qquad S'':\quad 2z<r$$

来定义。过 S' 上一点 $P=(x, y, z)$，引接連南极 $(0, 0, -r)$ 之直綫交 x-y 平面于点 $(u, v, 0)$，将 (u, v) 作为 S' 上对应于点 P 的坐标。同样，过 S'' 上一点 $P=(x, y, z)$，引接連北极 $(0, 0, r)$ 的直綫交 x-y 平面于点 $(\bar{u}, \bar{v}, 0)$，把 $(\bar{u}, \bar{v})$ 作为 S'' 上与 P 对应之坐标。以这种方式构成的坐标系 (u, v) 和 $(\bar{u}, \bar{v})$ 将满足性质 (1)，(2)，(3)′，这从以下的説明就可以看出。若点 $P=(x, y, z)$ 在

S' 上,則由簡单計算得

$$u=\frac{rx}{r+z}, \qquad v=\frac{ry}{r+z}.$$

从此解出 x, y, z 卽得

$$x=\frac{2r^2u}{u^2+v^2+r^2}, \quad y=\frac{2r^2v}{u^2+v^2+r^2}, \quad z=\frac{r(r^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+r^2}.$$

由这些关系式就曉得性质(1)是显然成立的。若(x, y, z)連續地变化,则(u, v)也連續地变化,反过来也一样。因此得到性质(2)。再者,若 P 在 S' 上变动,那末容易知道,点(u, v)所描繪的图形是在圓的內部

$$u^2+v^2<3r^2.$$

因此,得出(3)'。

S'' 上的点 $P=(x, y, z)$ 和它在 S'' 上的坐标$(\bar{u}, \bar{v})$之間也有同样的关系。不过这些关系和上面的关系略有不同,卽

$$\bar{u}=\frac{rx}{r-z}, \qquad \bar{v}=\frac{ry}{r-z},$$

$$x=\frac{2r^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}, \quad y=\frac{2r^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}, \quad z=\frac{r(\bar{u}^2+\bar{v}^2-r^2)}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}.$$

还有,当 P 在 S'' 上变动时,点$(\bar{u}, \bar{v})$所描繪的图形也是在圓的內部

$$\bar{u}^2+\bar{v}^2<3r^2.$$

坐标系(u, v)除了在 S 之一部分 S' 上作了規定外,在其他部分幷未給予定义(除南极之外,(u, v)之定义域可以扩張到 S 的全部,但不能扩張及于包括南极在內的 S 全部)。因此,(u, v)称为 S 上的局部坐标系,S' 称为局部坐标系(u, v)的坐标邻域(或定义域)。

4. 坐标变換

S' 与 S'' 之共同部分 $D=S'\cap S''$ 內的点 $P=(x, y, z)$ 具有两种局部坐标(u, v)与$(\bar{u}, \bar{v})$. 从前面各式容易推出它們之間的

关系为

$$\bar{u}=\frac{r^2u}{u^2+v^2},\qquad \bar{v}=\frac{r^2v}{u^2+v^2},$$

$$u=\frac{r^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2},\qquad v=\frac{r^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}.$$

对于 D 内之点 P，因为有 $u^2+v^2>0$，$\bar{u}^2+\bar{v}^2>0$，所以 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 是 (u, v) 的函数，而且有直到任何阶的連續导数。

由于这个事实，对于定义在球面 S 上的函数 F，我們可以規定如下的概念：F 在 S 上一点 P 之邻域内具有 k 阶的連續导数（簡单地讲，F 在点 P 之邻域内是 C^k-函数）。規定的方式是这样的：首先就 $P\in S'$ 的情况而論，当 F 在 S' 上是 (u, v) 的函数，且記以 $F=\varphi(u, v)$ 时，φ 关于 u，v 有直到 k 阶的所有偏导数，而且这些偏导数都是連續的。也就是說，作为 (u, v) 的函数，φ 是 C^k-函数，这时称 F 在点 P 之邻域内是 C^k-函数。再就 $P\in S''$ 的情况而論，作为 $(\bar{u}, \bar{v})$ 的函数的 F 写成 $F=\psi(\bar{u}, \bar{v})$ 时，若 ψ 关于 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 是 C^k-函数，則称 F 关于 $(\bar{u}, \bar{v})$ 是 C^k-函数。如果 P 是在 S' 和 S'' 相交的区域 $D=S'\cap S''$ 中，則由上述 u，v 和 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 間的关系知道 $\varphi(u, v)$ 是 C^k-函数。这一事实和 $\psi(\bar{u}, \bar{v})$ 是 C^k-函数的事实是等价的。因此，当我們說 F 在 $P\in D$ 之邻域内是 C^k-函数时，乃意味着就 (u, v) 而論和就 $(\bar{u}, \bar{v})$ 而論是无所区别的。

球面 S 上的区域 S'，S'' 及其所属的局部坐标系 (u, v) 和 $(\bar{u}, \bar{v})$ 构成 S 上的一个“流形构造”。以上述的球面情况作为模型的流形概念，其一般的叙述方式将在下面提到。

§2 流 形

1. 数空間

把 n 維数空間記为 R^n。所謂数空間 R^n，就是由 n 个实数所成的数組

$$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

的全体組成的集合。R^n 的元素有时称为点。R^n 之两点 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 与 $y=(y^1, \cdots, y^n)$ 若有

$$x^1=y^1, \cdots, x^n=y^n,$$

则称它們相等，写成 $x=y$。(R^1 看做是直綫，R^2 看成是平面，R^3 看成是三維空間。) R^n 內两点 x, y 間的距离 $\overline{xy}$ 規定为

$$\overline{xy}=\sqrt{(x^1-y^1)^2+\cdots+(x^n-y^n)^2},$$

这时 R^n 就构成距离空間。对于距离空間 R^n 內各点 x, y, z 有

(1) $\overline{xy}\geqslant 0$ (等号只限于 $x=y$ 时成立)，

(2) $\overline{xy}=\overline{yx}$,

(3) $\overline{xy}\leqslant\overline{zx}+\overline{zy}$.

从此，就对 R^n 引入了拓扑构造。今后只要把 R^n 作为拓扑空間❶处理，指的都是这种測度拓扑。

2. 流形的定义

設 M 是满足 Hausdorff 分离公理❷的拓扑空間，n 是自然数。当由 M 之开集組成的一族 $\{U_j; j\in J\}$ (J 是标数 j 的集合)，以及由各开集 U_j 投于 R^n 之映射 φ_j 已給定时，只要它們满足以下諸条件，就称 $\{U_j, \varphi_j\}$ 所成的系統 (这里略去 J) 在 M 上定义一个 **C^∞-流形构造**，n 称为**流形的維数**。或者可以这样說，由于 $\{U_j, \varphi_j\}$，因此 M 是 n 維的 C^∞-流形。所說的条件是

(I) U_j 全体之和集就是 M。

(II) 对于每一个 j，U_j 之象 $D_j=\varphi_j(U_j)$ 是 R^n 內的开集，φ_j 是由 U_j 投于 D_j 上的拓扑映射。也就是說，φ_j 是一对一的，它本身以及其逆映射 φ_j^{-1} 都是連續的。

(III) 对于使 $U_j\cap U_k\neq\phi$ (ϕ 是空集) 的任意标数 j 与 k，有

---

❶ 拓扑空間及其有关事項，請参考本丛书河田敬义著《集合·拓扑·測度》。

❷ 参看本丛书河田敬义著《集合·拓扑·測度》。

如下的事实成立：对于 $U_{jk}=U_j\cap U_k$ 内的各点 p，如置

$$\varphi_j(p)=(u^1(p),\cdots,u^n(p)),$$
$$\varphi_k(p)=(\bar{u}^1(p),\cdots,\bar{u}^n(p)),$$

则 $\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n$ 是 $u^1,\cdots,u^n$ 的函数（定义域是 $\varphi_j(U_{jk})$）❶。这样的 n 个函数可微直到任意阶，而且所有导数是連續的（簡記为 C^∞），这就是說，对于任意的自然数 ν 而言，$\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n$ 是 $u^1,\cdots,u^n$ 的 C^ν-函数。（因此，若把 $u^1,\cdots,u^n$ 看做是 $\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n$ 的函数，那末，它們当然是在 $\varphi_k(U_{jk})$ 上定义的 C^∞-函数。）

注意　若在(III)内只說 $\bar{u}^i$ 是 $u^1,\cdots,u^n$ 的 C^ν-函数（ν 是某一自然数），而再无其他的假定，則我們說規定了 M 的 C^ν-流形构造。如果 $\bar{u}^i$ 是 $u^1,\cdots,u^n$ 的实解析函数，即 $\bar{u}^i$ 在 $\varphi_j(U_{jk})$ 各点 $(u_0^1,\cdots,u_0^n)$ 之邻域内可展开为 $u^1-u_0^1,\cdots,u^n-u_0^n$ 之冪級数时，則說我們定义了实解析的流形构造，或簡単地說，定义了 C^ω-流形。若取复数空間 C^n 代替 R^n，把 $\bar{u}^i$ 看做是 u^j 的复解析函数，則同样地可以規定**复解析的流形构造**。这时 n 称为复維数。复維数为 n 的复解析流形可以看成是实維数为 $2n$ 的实解析流形。（逆命題不成立。）无論是实解析流形或复解析流形，其情况和 C^∞-流形构造是差不多的，所以为了簡单起見，下面只討論 C^∞-流形构造。

例1　取 R^n 当作 M，将单独的 R^n 当做一族 $\{U_j\}$，把从 R^n 投到 R^n 的恒等映射作为 φ_j，那末显然(I)，(II)，(III)都成立。以后凡是提到 R^n 的 C^∞-流形构造，都是指的这种由 $\{U_j,\varphi_j\}$ 所定义的 R^n 之 C^∞-流形构造。

例2　§1里所述的球面 S 上之开集 S' 与 S'' 和它們上面的 (u,v) 与 $(\bar{u},\bar{v})$，規定了 S 上的一个 C^∞-流形构造，这从§1的叙述中就可以驗証出来。

关于由 $\{U_j,\varphi_j\}$ 所定义的 M 之 C^∞-流形构造，φ_j 称为 U_j 上的**局部坐标系**，U_j 称为 φ_j 的**坐标邻域**。对于 U_j 内的点 p，命 $\varphi_j(p)=(u^1(p),\cdots,u^n(p))$，那末即使不提 φ_j，有时也是把 $(u^1,$

---

❶　詳言之，这意味着在 $\varphi_j(U_{jk})$ 上規定的函数 $\varphi^i(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是存在的，而且对于 U_{jk} 内各点 p，$\bar{u}^i(p)=\varphi^i(u^1(p),\cdots,u^n(p))$ $(i=1,\cdots,n)$ 成立（φ^i 可知是唯一确定的）。但为简单起見，采用以上的說法。

$\cdots, u^n$) 説成是局部坐标系。$u^1, \cdots, u^n$ 是定义于 U_j 上的实函数。

3. 函数的可微性定义和 C^∞–流形构造的一致性

設 M 是由 $\{U_j, \varphi_j\}$ 所定义的 C^∞–流形，V 是 M 的一个开集。这时，在 V 上定义的实函数 F，就称为**在 V 内一点 p_0 是 C^ν 的**（ν 是自然数）。这指的是对于这样一个有 $p_0 \in U_j$ 的 U_j，若 F 是以 U_j 为坐标邻域的局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$ 的函数，则 F 是 $u^1, \cdots, u^n$ 的 C^ν–函数。这时从 (III) 知道，如果有另一坐标邻域 U_k 也含有 p_0，则 F 作为 U_k 上的局部坐标系 $(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$ 的函数时仍是 C^ν–函数。这就是説，不因含有 p_0 之坐标邻域的取法不同而影响 F 在点 p_0 的 C^ν–性。这意味着 F 在点 p_0 的 C^ν–性之规定，与含 p_0 之坐标邻域的取法无关。如果 F 在 V 上的每一点都具有 C^ν–性，则称 F 在 V 上有 C^ν–性。如果对于任何自然数 ν，F 都具有 C^ν–性，那末称 F 在 V 上有 C^∞–性。

例 1 U_j 上的 $u^1, \cdots, u^n$, $u^1 + \cdots + u^n$ 等都是 C^∞–函数。而且 $\sin(u^1 - u^2)$ 等亦然。

若除 $\{U_j, \varphi_j\}$ 之外，另有一系 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ 也满足 (I)，(II)，(III)。这时，由 $\{U_j, \varphi_j\}$ 所定义的 M 之 C^∞–流形构造和由 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ 所定义的 M 之 C^∞–流形构造同时出現。我們約定称这两者**相等**，其规定如下：对于 M 的任意开集 V 及其上定义的实函数 F，F 关于 $\{U_j, \varphi_j\}$ 是 V 上的 C^∞–函数和 F 关于 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ 是 V 上的 C^∞–函数的事实是等价的。

这个条件又可重述如下。对于 $U_j \cap U'_\alpha \neq \phi$ 的任意 j 与 α，設 U_j, U'_α 上的局部坐标系分别为 $(u^1, \cdots, u^n)$ 和 $(v^1, \cdots, v^n)$，那末：在 $U_j \cap U'_\alpha$ 上作为 $v^1, \cdots, v^n$ 之函数的每一个 u^i 都是 C^∞–函数。而且在 $U_j \cap U'_\alpha$ 上作为 $u^1, \cdots, u^n$ 之函数的每一个 v^i 也都是 C^∞–函数。

例 2 取 $M = R^1$，試考虑 M 上两个系統 $\{U_j, \varphi_j\}$ 与 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$。象 §2.2

之例1里所說的那样規定 $\{U_j, \varphi_j\}$，而对于 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ 則作如下之規定。首先单独由 $M=R^1$ 形成族 $\{U'_\alpha\}$，規定 $\varphi'_\alpha(x)=x^3$（x 之3次幂）。因为 $u^1(x)=x$，$v^1(x)=x^3$，所以 v^1 是 u^1 的 C^∞-函数，但 $u^1=(v^1)^{1/3}$ 不是 v^1 的 C^∞-函数。因此，由 $\{U_j, \varphi_j\}$ 和 $\{U'_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ 所定义的 C^∞-流形构造不相等。

例3 設 E 是在实数体上規定的 n 維向量空間。当 E 的基底取定后，E 的每一个元素可以表示为 n 个实数（支量）。因此，E 的元素和 R^n 內的点成一一对应。从此，对于 E 可以导入 C^∞-流形构造（采取与 §2.2 例1 同样的方式）。这样的 C^∞-流形构造和 E 的基底之选取方式无关，这是容易知道的。

4. 局部坐标系和坐标邻域之拓广定义

設 M 是由 $\{U_j, \varphi_j\}$ 所定义的 n 維 C^∞-流形。V 是 M 的开集（不是空的），$x^1, \cdots, x^n$ 是定义于 V 上的实函数。当下面的条件(1)～(3)成立时，就称 $(x^1, \cdots, x^n)$ 是 V 上的局部坐标系（拓广意义下的），V 称为它的坐标邻域❶。

(1) $x^1, \cdots, x^n$ 是 V 上的 C^∞-函数。

(2) 对于 V 上的点 p，有 R^n 的点 $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ 与之对应。形成这种对应关系的映射 φ，是由 V 投于 R^n 中的一对一的映射。

(3) 对于 V 内任意一点 p_0，有 $p_0 \in U_j$ 的适当 U_j 存在，它具有如下的性质：由于 U_j 上的局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$，在 $V \cap U_j$ 内作为 $u^1, \cdots, u^n$ 之函数的 $x^1, \cdots, x^n$ 写成

$$x^i = F^i(u^1, \cdots, u^n) \quad (i=1, \cdots, n)$$

时，函数行列式

$$\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1}, \cdots, \dfrac{\partial x^1}{\partial u^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1}, \cdots, \dfrac{\partial x^n}{\partial u^n} \end{vmatrix}$$

---

❶ 正如以下定义所启示的那样，这时，对于 V 之任意部分开集 V_0，$(x^1, \cdots, x^n)$ 組成它上面的局部坐标系。

之值在 $u^1=u^1(p_0)$, …, $u^n=u^n(p_0)$ 处不等于0。

这里应当注意的是，对于任何其他的 U_k，只要 $p_0\in U_k$，(3)仍旧是成立的。事实上，設 U_k 上的局部坐标系是 $(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$，从(III)知道，对于 $U_j\cap U_k$ 之每一点有

$$\frac{\partial(u^1, \cdots, u^n)}{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}\frac{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}=1.$$

因此，对于点 p_0 有

$$\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}=\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}\frac{\partial(u^1, \cdots, u^n)}{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}\neq 0.$$

利用隐函数理論❶，从(3)就知道 $u^1, \cdots, u^n$ 是 $x^1, \cdots, x^n$ 的函数(在 $V\cap U_j$ 上)，而且是 C^∞-函数(此外，还知道 $\varphi(V)$ 是 R^n 内的开集)。因此，在 V 上定义的函数 F 是 V 上的 C^∞-函数，其必要与充分条件为 F 是 $x^1, \cdots, x^n$ 的函数，而且是它們的 C^∞-函数。

更由隐函数理論可以推得如下的事实。設 $x_1, \cdots, x_n$ 是在 M 之开集 $V(\neq\phi)$ 上定义的实函数，且满足(1)；对于 V 内之某一点 p_0 以及 $p_0\in U_j$ 的一个 U_j，(3) 成立；那么，若取 p_0 的一个充分小的邻域 $V_0\subset V$，则对于 V_0，(1)，(2)，(3)全都成立。这是容易知道的。因此，$(x^1, \cdots, x^n)$ 是 V_0 上的局部坐标系。

今后，当我們提到局部坐标系以及坐标邻域时，就是指这种拓广意义下的概念。

設 $(x^1, \cdots, x^n)$ 是 V 上的局部坐标系，当点 p 属于 V 时，就称 $(x^1, \cdots, x^n)$ 是**点 p 周圍**(或在点 p)的局部坐标系❷。

对于点 p 周圍的两組局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 与 $(y^1, \cdots, y^n)$，其間所成的函数行列式在点 p 处的值为

---

❶ 例如可参考高木貞治：解析概論，第7章；或藤原松三郎：微分积分学，第2卷，第5章。(如果这些日文书讀者参考起来不方便，则亦可参考 Г. М. Фихтенгольц 微积分学教程(高等教育出版社 1955)第一卷，第六章§2——校者注)

❷ 这里沒有明白地提出坐标邻域，这种說法比較簡单。

$$\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} \neq 0.$$

因为取 $p\in U_j$ 的 U_j，以及在 U_j 上取局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$ 时，

$$\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} = \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)} \frac{\partial(u^1, \cdots, u^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} \neq 0.$$

5. C^∞-映射

設 M_1, M_2 是 C^∞-流形(維数不同也可以，各为 m 維与 n 維)，F 是由 M_1 投于 M_2 中的映象。当 F 满足如下条件时，则称它是 **C^∞-映射**。

对于 M_1 的任意一点 p_0，和在 $F(p_0)=q_0$ 周圍的任意局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^n)$，以及它的坐标邻域 V_2，取 p_0 周圍的适当局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^m)$ 以及它的坐标邻域 V_1，使

$$F(V_1)\subset V_2 ❶,$$

以及使在 V_1 上定义的 n 个实函数 $y^1(F(p)), \cdots, y^n(F(p))$ $(p\in V_1)$ 全是 C^∞-函数❷。

这时，$y^i(F(p))$ 作为 $x^1, \cdots, x^m$ 的函数，以

$$y^i(F(p)) = \varphi^i(x^1, \cdots, x^m) \quad (i=1, \cdots, n)$$

来表示，由此形成的 n 行 m 列的矩陣

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial x^m} \end{bmatrix}_p,$$

称为在点 p 的局部坐标系 (x^i) 及 (y^j) 之 C^∞-映射 F 的**函数矩陣**，或 **Jacobi 矩陣**，以

$$\left(\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}\right)_p$$

---

❶ 从而 F 是連續映象。

❷. 此时，对于 p_0 周圍的其他局部坐标系 $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$，坐标邻城 V_3，$F(V_3)\subset V_2$ 亦成立。

表示。在不至于发生混淆的情况下，可以略去 F，简单地写成

$$\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p.$$

例 1 $M_1=M_2$，$F=$恒等映射：$F(p)=p$ 时，称 $(\partial y^j/\partial x^i)_p$ 是在点 p 关于局部坐标系 (x^i) 与 (y^j) 間的函数矩陣。其行列式就是函数行列式。

例 2 $M_2=R^1$，亦即 F 是定义在 M_1 的实函数。取 $y^1(q)=q\,(q\in R^1)$ 作为 R^1 的坐标系，以

$$y^1(F(p))=F(p)=\varphi(x^1,\cdots,x^m)。$$

来表示。这时常常把 $(\partial(y^1\circ F)/\partial x^i)_p$ 写成

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\right)_p,\ \cdots,\ \left(\frac{\partial F}{\partial x^m}\right)_p.$$

$\varphi(x^1,\cdots,x^m)$ 称为 F 在 V_1 上的**局部表示**(local expression)。

注意 C^ν-映象可以仿照上面同样地定义（ν 是自然数）。

6. C^∞-拓扑映射

設 M_1，M_2 是 C^∞-流形，F 是由 M_1 投于 M_2 上的一对一的映射。当 F，F^{-1} 同是 C^∞-映射时，則称 F 是由 M_1 投于 M_2 上的 **C^∞-拓扑映射** (C^∞-homeomorphism)。如果这样的 F 存在，則称 C^∞-流形 M_1 与 M_2 互为**同胚**（所謂同胚的两个 C^∞-流形，乃意味着作为 C^∞-流形，其本质上是相同的）。例如由 R^n 投于 R^n 上的綫性映射 $y^i=\sum a^i_jx^j$，$\det(a^i_j)\neq 0$ 是 C^∞-拓扑映射。

§3 切向量空間

1. 球面的切平面与切向量空間

R^3 内的球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$，在其上一点 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程，如所周知，是

$$xx_0+yy_0+zz_0=r^2.$$

在切平面上的向量全体构成一个二維的向量空面 T_P。向量 (a,b,c) 含于 T_P 中的必要与充分条件由

$$ax_0+by_0+cz_0=0$$

表达出(因为点(x_0+a, y_0+b, z_0+c)在切平面上)。

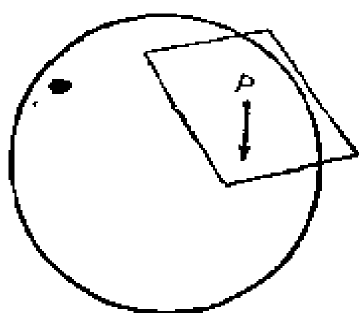


图 3.1

现在設P在§1.3的S'上,則从S'上的局部坐标系(u, v)“自然地”在T_P上可以規定一个基底。因此,关于这项基底,T_P的元素,亦卽切向量可以用两个支量表示出来。下面將对此加以討論。P之局部坐标設为(u_0, v_0)。在S'上考虑一条适当的可微曲綫

$$P(t)=(x(t), y(t), z(t)), \ P(0)=P.$$

若用局部坐标表示它,則写作$(u(t), v(t))$。让我們这样設想,在$t=0$这一点,这条曲綫的切向量就是已知的T_P中的一个元素。这时根据§1.3,因有

$$x(t)=2r^2u(t)/(u(t)^2+v(t)^2+r^2), \ \cdots,$$

所以在点$P(t)$的曲綫之切向量,其支量(簡記$x(t)=x$, $u(t)=u$)可以由

$$\dot{x}=\frac{2r^2(\dot{u}[u^2+v^2+r^2]-2u[\dot{u}u+\dot{v}v])}{[u^2+v^2+r^2]^2}, \ \cdots$$

求得。或者为了看起来方便起見,这些式子还可以写成以下形式

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dot{u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dot{v}, \\ \dot{y}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dot{u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dot{v}, \\ \dot{z}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dot{u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dot{v}. \end{cases}$$

或者利用矩陣写法,記

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

把它們写成

$$\dot{X}=J\dot{U}.$$

这里矩陣 J 的阶数常为 2.（如果在 S' 上的某点之邻域内，J 的阶数小于 2 的話，则从隐函数理論知道，在这点的邻域内 S' 将成为一曲綫或一点。）因此，$\dot{X}$ 給定后，$\dot{U}$ 可以唯一地确定。特别当 $t=0$ 时，对于以 $\dot{X}(0)$ 作为支量的切向量，因有

$$\dot{X}(0)=J(0)\dot{U}(0),$$

而把由此所决定的 $\dot{U}(0)$ 称为这个**切向量关于局部坐标系 (u, v) 的支量**。显然，切向量 $(\partial x/\partial u,\ \partial y/\partial u,\ \partial z/\partial u)$ 和 $(\partial x/\partial v,\ \partial y/\partial v,\ \partial z/\partial v)$ 关于 (u, v) 的支量分别是 $(1,0)$ 与 $(0,1)$。这就是上述二向量取作向量空間 T_P 之基底的理由。同时容易看出，当两个切向量关于局部坐标系 (u, v) 的支量分别为 $(\lambda_1,\ \mu_1)$，$(\lambda_2,\ \mu_2)$ 时，则其和的向量之支量是 $(\lambda_1+\lambda_2,\ \mu_1+\mu_2)$，前者 κ 倍后之支量是 $(\kappa\lambda_1,\ \kappa\mu_1)$。

2. 向量之支量的变换法則

在球面 S 上的两个区域 S' 与 S'' 的共同部分 $D=S'\cap S''$ 处，給定两套局部坐标系 (u, v) 与 $(\bar{u}, \bar{v})$（§1.3, §1.4）。因此，在 D 内一点 P 的切向量 (a, b, c) 有关于 (u, v) 之支量 (λ, μ)，以及关于 $(\bar{u}, \bar{v})$ 之支量 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$。試考察 (λ, μ) 和 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 間的关系：由

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{v}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{v}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial z}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}=\bar{J}\begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

即得

$$J\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\bar{J}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}\\ \bar{\mu}\end{pmatrix}.$$

由复合函数的偏微分法则知道，

$$J=\bar{J}\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\end{pmatrix}_p=\bar{J}A\ (\text{以}\ A\ \text{表示式里的矩陣}),$$

从而得出

$$\bar{J}A\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\bar{J}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}\\ \bar{\mu}\end{pmatrix}.$$

但由于 $\bar{J}$ 的秩数是 2，故求得关系式

$$\begin{pmatrix}\bar{\lambda}\\ \bar{\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}.$$

3. 流形之切向量的定义

設 M 是 n 維 C^∞-流形。以上述球面的情况作为典范，进而闡述在 M 上一点 p 之切向量的概念。p 周圍的局部坐标系之全体所成之集記为 γ_p。由 γ_p 投向 R^n 中的映射 L 如果具有以下的性质时，則称 L 是 M 在 p 处的**切向量**(詳言之，称为**逆变切向量**或**逆变向量**)。其条件为：对于 γ_p 所属的任意二个局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 与 $(y^1, \cdots, y^n)$，由映射 L 投射所得的象分别为

$$L\{(x^1, \cdots, x^n)\}=(a^1, \cdots, a^n),$$
$$L\{(y^1, \cdots, y^n)\}=(b^1, \cdots, b^n)$$

时，a^i 与 b^i 間有如下的关系成立：

$$(*)\qquad b^i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p a^j\quad(i=1, \cdots, n).$$

当 $L\{(x^i)\}=(a^i)$ 时，則称 $(a^1, \cdots, a^n)$ 是切向量 L 关于局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的**支量**。

注意1 以上曾經提到，L 是由 γ_p 投射于 R^n 中的映射，关于它我們也有如下的說法：对于 p 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，有由对应方式使被称为 L 关于 (x^i) 系之支量的那 n 个实数所成的数組 $(a^1, \cdots, a^n)$ 和它对应。关于任何两个局部坐标系的支量，其間成立 $(*)$ 所示的"**支量变换法則**"，这样的 L 称为在 p 处的逆变切向量。

注意2 如果 M 是复解析的流形，那末当由 γ_p 投射于 C^n（n 維复数空間）中的映射滿足 $(*)$ 时，就規定了 M 的切向量。

以 Kronecker 符号 δ^i_j $(\delta^i_i=1,\ \delta^i_j=0\ (i\neq j))$ 組成的

$$(\delta^1_i,\ \delta^2_i,\ \cdots,\ \delta^n_i),$$

其关于局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 之支量的切向量，特别用記号

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

来表示。可以确认，这样的切向量是唯一存在的。要說明这一点，一般只要証明以下事实就可以了。

定理 当 p 周圍的一个局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 以及 n 个实数 $(a^1, \cdots, a^n)$ 任意給定时，关于 $(x^1, \cdots, x^n)$ 在 p 处以 $(a^1, \cdots, a^n)$ 作为支量的切向量 L 是唯一存在的。

証明 关于 p 周圍的任意其他局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^n)$ 的支量 $(b^1, \cdots, b^n)$ 由 $(*)$ 定义，因此关于 p 周圍的另一局部坐标系 $(z^1, \cdots, z^n)$ 的支量 $(c^1, \cdots, c^n)$ 有

$$b^i=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p a^j, \qquad c^i=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)_p a^j.$$

从而

$$c^i=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)_p\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)_p b^k=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right)_p b^k.$$

这样就定义了在 p 处的切向量。L 之唯一性是很明显的。 証毕

在 p 处，M 的逆变切向量之全体所成的集記以 $T_p(M)$，或簡記为 T_p。在 T_p 内加法与数值乘法規定如下。对于 T_p 内的二元素 A 与 B，取定 p 周圍的一个局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，关于这一

坐标系，A, B 之支量各为 $(a^1, \cdots, a^n)$，$(b^1, \cdots, b^n)$。关于局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，以 $(a^1+b^1, \cdots, a^n+b^n)$ 为支量的切向量写成 $A+B$，取定实数 c，关于局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，以 $(ca^1, \cdots, ca^n)$ 为支量的切向量写成 cA。$A+B$ 和 cA 的定义与局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 之取法无关。这可以从变换法則 (*) 是支量間的齐次綫性关系式这一事实看出。显然，n 个切向量

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

組成 T_p 的基底，因此，T_p 是实数体上的 n 維向量空間❶。这項基底叫做由局部坐标系 (x^i) 所定的 T_p 之标准基底。T_p 叫做 M 在 p 处的切向量空間。

例 1 由 p 周圍二个局部坐标系 (x^i)，(y^i) 所定的标准基底間，利用簡单計算，可以得到下面关系式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \quad (i=1, \cdots, n).$$

4. 协变向量

切向量空間 T_p 的对偶向量空間記以 T_p^*，也就是說，把在 T_p 上定义的实綫性形式之全体所成的向量空間記以 T_p^*。T_p^* 之元素叫做在 p 处的协变切向量。由 p 周圍的局部坐标系 (x^i) 所定的 T_p，其标准基底以 $L_i=(\partial/\partial x^i)_p$ $(i=1, \cdots, n)$ 来表示，和 $(L_1, \cdots, L_n)$ 对偶的 T_p^* 之基底記以 $(\omega^1, \cdots, \omega^n)$。这就是說，$\omega^i$ 由

$$\omega^i(L_j)=\delta^i_j=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

規定出。$(\omega^1, \cdots, \omega^n)$ 称为由局部坐标系 (x^i) 所定的 T_p^* 之标准基底。ω^i 通常用記号 $\omega^i=(dx^i)_p$ $(i=1, \cdots, n)$ 来表示。当 T_p^* 的元素 ω 关于基底 (ω^i) 的支量記以 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 时，有

$$\omega=\sum\alpha_i\omega^i.$$

---

❶ 在复数維 n 的复解析流形的情况下，T_p 是复数体上的 n 維向量空間。

这里$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$是协变切向量$\omega$关于局部坐标系$(x^i)$的支量。

現在，試求由p周圍的两个局部坐标系(x^i)，(y^i)所規定的T_p^*之标准基底$(dx^i)_p$与$(dy^i)_p$間的关系。設

$$(dy^i)_p=\sum_j \lambda_j^i (dx^j)_p,$$

則由§3.3之例1，得

$$(dy^i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p\right)=\sum_j \lambda_j^i (dx^j)_p\left(\sum_l \frac{\partial x^l}{\partial y^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_p\right),$$

因此，更得到

$$\delta_k^i=\sum_{j,l}\lambda_j^i\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^k}\right)_p\delta_l^j=\sum_j \lambda_j^i\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)_p.$$

这式子說明了矩陣(λ_j^i)等于矩陣$(\partial x^j/\partial y^k)_p$的逆陣。从此有

$$(dy^i)_p=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p (dx^j)_p.$$

从上式容易看出，协变切向量ω关于(x^i)和(y^i)之支量(α_i)与(β_i)間有变換法則

$$\beta_j=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_p\alpha_i \quad (j=1, \cdots, n)$$

成立。对逆变切向量的支量变換法則而論，上面变換式称为**逆步的**(contragradient)。利用这一变換法則，正和关于逆变切向量的情形一样，可以拿它来定义协变切向量。这里从略，讀者可以試作。

5. 張量

以下将述說n維C^∞-流形M**在一点p的張量的定义**。設$A_1, \cdots, A_t$是一組向量空間，假定任何一个A_i都和T_p或T_p^*中的任一个是一致的。若設A_i中有r个T_p，s个T_p^* $(t=r+s)$，那末張量积[1]

---

[1] (原文漏注)[2]。按張量积又称为直积(direct product)或 Cartesian 积。这里当$r=s=t=0$时，$A_1\otimes\cdots\otimes A_t$是实数体，其元素(实数)称为数量(scalar)。

[2] 參考本丛书《代数学》第1章§20張量积，或 Г. Е. Шилов《綫性空間引論》§39，高等教育出版社 1958；И. М. Гельфанд《綫性代数学》，§23，高等教育出版社 1959。——校者注

$$A_1\otimes\cdots\otimes A_t$$

的元素称为**在点 p 处 M 的 (r, s) 型張量**（詳言之，应称切張量），r 是它的**逆变阶数**，s 是它的**协变阶数**。特别，称 $(r, 0)$ 型張量为 r 阶的**逆变張量**，称 $(0, s)$ 型張量为 s 阶的**协变張量**。当 $r>0$，$s>0$ 时，(r, s) 型的張量叫做**混合張量**。

$(1, 0)$ 型的張量就是逆变向量，$(0, 1)$ 型的張量就是协变向量。以后为了簡单起見，把"在点 p 的"这句話省去。

注意 对于混合張量而論，若只称它为 (r, s) 型，其实是不很确切的。例如說，就某一个 $(2,1)$ 型的張量而言，$T_p\otimes T_p\otimes T_p^*$，$T_p\otimes T_p^*\otimes T_p$，$T_p^*\otimes T_p\otimes T_p$ 都是属于 $(2, 1)$ 型，而反过来，已知属于 $(2, 1)$ 型者乃三者之一，但到底属于三者中的那一种却不能确定（在 $A_1\otimes\cdots\otimes A_t$ 内，第几項因子是逆变型的或协变型的，加以标明是必要的）❶。不过大体說来，对于

$$\underbrace{T_p\otimes\cdots\otimes T_p}_{r}\otimes\underbrace{T_p^*\otimes\cdots\otimes T_p^*}_{s}\quad(=(T_p)^r_s)$$

的元素能成立的事項，对于其他 (r, s) 型的張量也能成立。因此不必仔細划分，单就型式而論就够了。

6. 張量之支量及其变换法則

由点 p 周圍的局部坐标系 (x^i) 所决定的 T_p 和 T_p^*，其标准基底設为 (L_i) 和 (ω^i)。作为 $(T_p)^r_s$ 的基底取 n^{r+s} 个

$$L_{i_1}\otimes\cdots\otimes L_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}.$$

关于这个基底，当 (r, s) 型張量 $S\in(T_p)^r_s$ 的支量写作 $(S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$ 时，則这 n^{r+s} 个数 $(S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$ 就称为关于局部坐标系 (x^i) 之 S 的**支量**。S 可以写成

$$S=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_s=1}^{n}S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}L_{i_1}\otimes\cdots\otimes L_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s},$$

---

❶ 以后在必要时，張量之型可以用 $[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t]$ 型来表示。在 $A_1\otimes\cdots\otimes A_t$ 内，$A_i=T_p$ 时規定 $\varepsilon_i=+1$，$A_i=T_p^*$ 时規定 $\varepsilon_i=-1$。例如 $T_p^*\otimes T_p\otimes T_p^*$ 之元素应归于 $[-1, 1, -1]$ 型的張量。

但为了书写简单起見，在本节采用通行的规約：**关于上下两次出现的标数实行总和时，其总和符号可以略去**❶。因此上式可以写成

$$S=S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}L_{i_1}\otimes\cdots\otimes L_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}.$$

关于 p 周圍的另一局部坐标系 $(\bar{x}^i)$，張量 S 之支量記以 $\bar{S}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$。若写 $J^i_j=(\partial x^i/\partial\bar{x}^j)_p$，$H^i_j=(\partial\bar{x}^i/\partial x^j)_p$，則 $(\bar{x}^i)$ 所定的标准基底 $(\bar{L}_i)$，$(\bar{\omega}^i)$ 由

$$\bar{L}_i=J^j_iL_j,\quad \bar{\omega}^i=H^i_j\omega^j$$

給出(§3.3, 4)。因此有

$$\bar{L}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\bar{L}_{i_r}\otimes\bar{\omega}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\omega}^{j_s}=J^{\lambda_1}_{i_1}\cdots J^{\lambda_r}_{i_r}H^{j_1}_{\mu_1}\cdots H^{j_s}_{\mu_s}L_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{\mu_s}.$$

把它代进

$$S=\bar{S}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\bar{L}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\omega}^{j_s}$$

里去，就得到

$$S^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}=\bar{S}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}J^{\lambda_1}_{i_1}\cdots J^{\lambda_r}_{i_r}H^{j_1}_{\mu_1}\cdots H^{j_s}_{\mu_s}.$$

这就是**張量的支量对于坐标变换的变換法則**。利用这一变換法則，就可以象 §3.3 那样地来定义張量。

注意 对于張量，若象 §3.5 之注意中所述的那样进行区别时，則其支量写成如下形式。例如对 (2, 1) 型的張量而論，$T_p\otimes T_p\otimes T^*_p$，$T_p\otimes T^*_p\otimes T_p$，$T^*_p\otimes T_p\otimes T_p$ 所属元素的支量分别写成 $S^{ij}{}_k$，$S^i{}_j{}^k$，$S_i{}^{jk}$。

7. 張量之运算(和与积)

首先，对于同型的張量 S_1 与 $S_2$❷，其和 S_1+S_2 以及数量倍积 λS_1(λ 是实数)的意义是明显的。关于一个局部坐标系，它們的支量之間成立关系：

$$(S_1+S_2)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=(S_1)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+(S_2)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s},$$

$$(\lambda S_1)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\lambda(S_1)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.$$

其次，对于两个張量 S_1 和 S_2(不同的型也可以)，可以規定它

---

❶ §4 以后，張量差不多不再出现，这时仍用总和符号。

❷ 詳言之，S_1，S_2 皆为 $[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l]$ 型时。

們的張量积 $S_1 \otimes S_2$。例如对于

$$S_1 \in T_p \otimes T_p^*, \quad S_2 \in T_p^* \otimes T_p^* \tag{3.1}$$

有

$$S_1 \otimes S_2 \in T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^* \otimes T_p^*.$$

一般，当 S_1, S_2 各属于 (r_1, s_1), (r_2, s_2) 型时，則 $S_1 \otimes S_2$ 属于 (r_1+r_2, s_1+s_2) 型。就关于一个局部坐标系之支量間的关系而言，張量积 $S_1 \otimes S_2$ 之支量等于 S_1, S_2 的支量之乘积。例如对于(3.1)的 S_1 与 S_2，有

$$(S_1 \otimes S_2)^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl} = (S_1)^{i}_{\cdot j} (S_2)_{kl}.$$

关于張量积，結合律是成立的，即

$$(S_1 \otimes S_2) \otimes S_3 = S_1 \otimes (S_2 \otimes S_3),$$

但交換律一般不成立，即

$$S_1 \otimes S_2 \neq S_2 \otimes S_1 \quad (\text{一般情况下})。$$

8．張量的縮約

有一种操作方法可以由 (r, s) 型的張量作出 $(r-1, s-1)$ 型的張量。我們将介紹由 $T_p \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^*$ 内的元素作出 $T_p \otimes T_p^*$ 内的元素之操作方法作为例証。取定一个局部坐标系 (x^i)，关于它，把張量 $S \in T_p \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^*$ 之支量写成 $S^{ij}_{\cdot\cdot kl}$。这时，对于一个逆变标数，例如說 i，和一个协变标数，例如說 k，先使它們相等，即 $i=k$，然后对 i 从 1 起到 n 止总和起来，所得的量記以 $P^j_{\cdot l}$，则

$$P^j_{\cdot l} = S^{ij}_{\cdot\cdot il}.$$

这样，就产生了关于局部坐标系 (x^i) 以 $P^j_{\cdot l}$ 为支量的張量 $P \in T_p \otimes T_p^*$。容易知道，由張量 S 作張量 P 的操作方法和局部坐标系 (x^i) 的取法是无关的。实际上，关于另一局部坐标系 $(\bar{x}^i)$，S 的支量 $\bar{S}^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 服从变换法则，即

$$\bar{S}^{ij}_{\cdot\cdot kl} = S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma\delta} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\right)_p \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta}\right)_p \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}\right)_p \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^l}\right)_p.$$

因此，

$$\bar{S}^{ij}_{\cdot\cdot il} = S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma\delta} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\right)_p \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta}\right)_p \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^i}\right)_p \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^l}\right)_p$$

$$=S^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta}\left(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^\beta}\right)_p\left(\frac{\partial x^\delta}{\partial\bar{x}^l}\right)_p\delta^\gamma_\alpha$$

$$=P^{\beta\cdot}_{\cdot\delta}\left(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^\beta}\right)_p\left(\frac{\partial x^\delta}{\partial\bar{x}^l}\right)_p.$$

这就意味着 $\bar{S}^{j\cdot}_{\cdot l}$ 是 P 关于局部坐标系 $(\bar{x}^i)$ 的支量。

象这样得出的張量 P，称为由張量 S 的第 1 逆变部分与第 1 协变部分在实行縮約手續后得到的張量。或者說，对逆变标数 i 与协变标数 k 实行縮約手續后得到的張量。

同样，对标数 i, l 实行縮約后，得到以 $Q^{\cdot j}_{k\cdot}$ 为支量的張量 Q。P 与 Q 是对某一逆变标数和协变标数經过縮約后得到的，如果有区別之必要时，可以写成

$$P=\varepsilon^1_1(S),\quad Q=\varepsilon^1_2(S)$$

来标明❶。显而易見，縮約运算是綫性的，也就是說

$$\varepsilon^1_1(S_1+S_2)=\varepsilon^1_1(S_1)+\varepsilon^1_1(S_2),$$

$$\varepsilon^1_1(\lambda S_1)=\lambda\varepsilon^1_1(S_1)\quad(\lambda\text{ 为实数})。$$

同时，容易看出，在 $i\neq j$, $k\neq l$ 的情况下，ε^i_k 和 ε^j_l 两个运算是可换的：

$$\varepsilon^i_k\varepsilon^j_l=\varepsilon^j_l\varepsilon^i_k.$$

9. 协变張量所确定的多重綫性形式

設 S 是流形 M 在点 p 的 s 阶协变張量，$X_1, \cdots, X_s$ 是在 p 的 s 个逆变向量。則 $X=X_1\otimes\cdots\otimes X_s$ 是 s 阶的逆变張量，$S\otimes X$ 是 (s, s) 型的張量。对后者逐次施行 s 次的縮約运算 ε^1_1, ε^2_2, $\cdots$, ε^s_s，最后得出一个数量 α，把它写成 $S(X_1, \cdots, X_s)$：

$$\alpha=\varepsilon^s_s\cdots\varepsilon^1_1(S\otimes X)=S(X_1, \cdots, X_s).$$

就支量而論，則可以說明如下。設关于局部坐标系 (x^i)，S 和 X_t 之支量各为

❶ ε^i_j 表示对第 i 号逆变标数和第 j 号协变标数实行縮約手續。

$$S_{i_1\cdots i_s},\quad \underset{(1)}{\xi^j},$$

那末 $S\otimes X$ 之支量是

$$S_{i_1\cdots i_s}\underset{(1)}{\xi^{j_1}}\underset{(2)}{\xi^{j_2}}\cdots\underset{(s)}{\xi^{j_s}}.$$

因此，

$$\alpha=S_{i_1\cdots i_s}\underset{(1)}{\xi^{i_1}}\cdots\underset{(s)}{\xi^{i_s}}=S(X_1,\cdots,X_s).$$

显然，$S(X_1,\cdots,X_s)$关于各 X_i 是綫性的，所以它是 $X_1,\cdots,X_s$ 的 s 重綫性形式。特别有

$$S\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)_p\right)=S_{i_1\cdots i_s},\tag{3.2}$$

如果 S_1, S_2 各为 r, s 阶的协变張量，而 X_1, X_2, $\cdots$, X_{r+s} 是逆变向量时，容易驗証

$$\begin{aligned}&(S_1\otimes S_2)(X_1,\cdots,X_{r+s})\\&\quad=S_1(X_1,\cdots,X_r)S_2(X_{r+1},\cdots,X_{r+s}).\end{aligned}$$

10. 反称协变張量

称 r 阶协变張量 S 为**反称的**，意思是指对于任意的逆变向量 $X_1,\cdots,X_r$，当 σ 为$(1,\cdots,r)$的任意置换时，

$$S(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)})=\varepsilon(\sigma)S(X_1,\cdots,X_r)\text{ ❶}$$

成立。由 §3.9 的(3.2)式容易驗証，S 成为反称的必要与充分条件是它的支量对于$(1,\cdots,r)$之任意置换有

$$S_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}=\varepsilon(\sigma)S_{i_1\cdots i_r}.$$

例如

$$S_{i_2i_1i_3\cdots i_r}=-S_{i_1i_2i_3\cdots i_r}.$$

注意 一阶协变張量，亦即协变向量常可視为反称的。而且，由以上看出，当 $i_1,\cdots,i_r$ 中至少有二个相等时，則 $S_{i_1\cdots i_r}=0$. 因此，如果 $r\geqslant n+1$，那末 r 阶的反称协变張量其实就是 0.

❶ $\varepsilon(\sigma)$ 表示 σ 之符号。詳言之，即当 σ 为偶置换时，$\varepsilon(\sigma)=1$；σ 为奇置换时，$\varepsilon(\sigma)=-1$.

11. 协变張量的反称化

对于协变張量有所謂反称化的手續。設 (x^i) 是一个局部坐标系，关于它，又設 S 之支量为 $S_{i_1\cdots i_r}$。現以

$$P_{i_1\cdots i_r}=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)\,S_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}.$$

这里的总和是对所有$(1,\cdots,r)$之置换σ(有 $r!$ 个)施行的。以$P_{i_1\cdots i_r}$作为支量的 r 阶协变張量 P，正如§3.8中所讲的縮約一样，它和局部坐标系 (x^i) 的取法无关。这样的張量 P 写成 $P=A(S)$，称为 S 之**反称化**。运算子 A 显然是綫性的，即 $A(\lambda S_1+\mu S_2)=\lambda A(S_1)+\mu A(S_2)$. S 的反称化 P 是反称协变張量。事实上，

$$\begin{aligned}P_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}&=\frac{1}{r!}\sum_{\tau}\varepsilon(\tau)S_{i_{\tau\sigma(1)}\cdots i_{\tau\sigma(r)}}\\&=\frac{1}{r!}\varepsilon(\sigma)\sum\varepsilon(\tau\sigma)S_{i_{\tau\sigma(1)}\cdots i_{\tau\sigma(r)}}\\&=\varepsilon(\sigma)P_{i_1\cdots i_r}.\end{aligned}$$

容易看出，如果要使 S 是反称的，則 $A(S)=S$ 这一条件是必要与充分的。$P=A(S)$ 和 S 之間有如下的关系，就是，对于任意逆变向量 $X_1,\cdots,X_r$，有

$$P(X_1,\cdots,X_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)S(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)}).$$

12. 反称协变向量的外积(反称积)

設 P, Q 分别是 r, s 阶的反称协变張量，則 $P\otimes Q$ 的反称化 $A(P\otimes Q)$ 是 $r+s$ 阶的反称协变張量。这样的張量称为 P 与 Q 的**外积**(或**反称积**或 **Grassmann 积**)，写成 $P\wedge Q$. 因此，对于逆变向量 $X_1,\cdots,X_{r+s}$，有

$$\begin{aligned}&(P\wedge Q)(X_1,\cdots,X_{r+s})\\&=\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)P(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)})Q(X_{\sigma(r+1)},\cdots,X_{\sigma(r+s)})\end{aligned}$$

(总和对$(1,\cdots,r+s)$的置换 σ 全体施行)。例如当 $r=s=1$ 时，

$$(P\wedge Q)(X_1,\ X_2)=\frac{1}{2}\{P(X_1)Q(X_2)-P(X_2)Q(X_1)\}\text{❶}.$$

从簡单的計算知道，对于反称协变張量 $P,\ Q,\ R$，有

$$(P\wedge Q)\wedge R=A(P\otimes Q\otimes R),\quad P\wedge(Q\wedge R)=A(P\otimes Q\otimes R)$$

成立。事实上，設 $P,\ Q,\ R$ 各为 $p,\ q,\ r$ 阶的張量，試考虑它們关于一个局部坐标系的支量。設 $(1,\ \cdots,\ p+q+r)$ 之置換全体所成的置換群为 G，在 G 的元素中，$p+q+1,\ \cdots,\ p+q+r$ 中的任意一个被固定的那些元素之全体組成 G 的部分群 H，則有

$$\begin{aligned}&(p+q+r)!A(P\otimes Q\otimes R)_{i_1\cdots i_{p+q+r}}\\&\quad=\sum_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)P_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}Q_{i_{\sigma(p+1)}\cdots i_{\sigma(p+q)}}R_{i_{\sigma(p+q+1)}\cdots i_{\sigma(p+q+r)}}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&(p+q)!\ (p+q+r)!\ \{(P\wedge Q)\wedge R\}_{i_1\cdots i_{p+q+r}}\\&=(p+q)!\sum_{\tau\in G}\varepsilon(\tau)\ (P\wedge Q)_{i_{\tau(1)}\cdots i_{\tau(p+q)}}R_{i_{\tau(p+q+1)}\cdots i_{\tau(p+q+r)}}\\&=\sum_{\tau\in G}\varepsilon(\tau)\ \{\sum_{\rho\in G}\varepsilon(\rho)\,P_{i_{\tau\rho(1)}\cdots i_{\tau\rho(p)}}Q_{i_{\tau\rho(p+1)}\cdots i_{\tau\rho(p+q)}}\}R_{i_{\tau(p+q+1)}\cdots i_{\tau(p+q+r)}}\\&=\sum_{\rho\in H}\sum_{\tau\in G}\varepsilon(\tau\rho)\ P_{i_{\tau\rho(1)}\cdots i_{\tau\rho(p)}}\,Q_{i_{\tau\rho(p+1)}\cdots i_{\tau\rho(p+q)}}\,R_{i_{\tau\rho(p+q+1)}\cdots i_{\tau\rho(p+q+r)}}\\&=\sum_{\rho\in H}(p+q+r)!\ A(P\otimes Q\otimes R)_{i_1\cdots i_{p+q+r}}\\&=(p+q)!\ \ (p+q+r)!\ A(P\otimes Q\otimes R)_{i_1\cdots i_{p+q+r}}.\end{aligned}$$

于是得到

$$A(P\otimes Q\otimes R)=(P\wedge Q)\wedge R.$$

同样也可得出

$$A(P\otimes Q\otimes R)=P\wedge(Q\wedge R).$$

从而結合律

$$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$$

也得出了。今后，这式的两边以 $P\wedge Q\wedge R$ 表示。至于反称协变張量 $P_1,\ \cdots,\ P_s$ 的外积 $P_1\wedge\cdots\wedge P_s$，可以規定为：

---

❶ 从而，若 $P,\ Q$ 为一阶时，則 $P\wedge Q=-Q\wedge P,\ \ P\wedge P=0.$

$$P_1\wedge\cdots\wedge P_s=P_1\wedge(P_2\wedge(P_3\wedge\cdots(P_{s-1}\wedge P_s)\cdots)$$
$$=A(P_1\otimes\cdots\otimes P_s).$$

在流形 M 上一点 p 的 r 阶反称协变張量之全体記以 A_r(最好写成 $A_r(p)$，但 p 可略去)，A_r 当然是 $(T_p)^0_r=T^*_p\otimes\cdots\otimes T^*_p$ (r 个) 的一个綫性子空間。在特別的情况下有

$$A_1=T^*_p=T_p \text{ 之对偶向量空間。}$$

当 $r>n$ 时，A_r 仅由 0 組成。$r\leqslant n$ 时，取一点 p 周圍的局部坐标系 (x^i)，則 $\binom{n}{r}$ 个的

$$(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p\quad(1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n)$$

构成 A_r 的基底。原因如下：設把 A_r 的任意一个元素 P 表示为

$$P=P_{i_1\cdots i_r}(dx^{i_1})_p\otimes\cdots\otimes(dx^{i_r})_p,$$

則
$$P=A(P)=P_{i_1\cdots i_r}(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p.\tag{3.3}$$

这就是說，$(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p$ 架成空間 A_r。但这些个 $(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p$ 是綫性无关的。事实上，对于实数系 $a_{i_1\cdots i_r}$，如有

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}a_{i_1\cdots i_r}(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p=0,$$

則这式左边的張量作为 P 而有

$$0=P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\right)=a_{i_1\cdots i_r}.$$

因此，对于任意的 r 阶协变反称張量 P，可以用

$$P=\sum_{i_1<\cdots<i_r}a_{i_1\cdots i_r}(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_p\tag{3.4}$$

唯一地表示。这里的 $a_{i_1\cdots i_r}$ 和 P 的支量 $P_{i_1\cdots i_r}$ 間的关系，可以从 (3.3) 和 (3.4) 求得

$$a_{i_1\cdots i_r}=\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)P_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}$$

(σ 是 $(1,\cdots,r)$ 的任意置换，其活动范圍是所有置换的全体)。从而利用 $P_{i_1\cdots i_r}$ 之反称性，得到

$$a_{i_1\cdots i_r}=r!\,P_{i_1\cdots i_r}\quad(i_1<\cdots<i_r).$$

§4 C^∞-映射的微分

1. C^∞-映射的微分

設 M_1, M_2 分别是 m, n 維的 C^∞-流形，F 是由 M_1 投射于 M_2 中的 C^∞-映射，$p\in M_1$ 之象是 $q=F(p)\in M_2$。在点 p 处，M_1 的切向量空間 T_p 投射到在点 q 处之 M_2 的切向量空間 T_q 的綫性映射 $(dF)_p$ 的定义如下。在 p, q 各取任意的局部坐标系，記以 (x^i) 和 (y^j)。F 关于 (x^i), (y^j) 的函数矩陣（§2.5）为 $((\partial y^j/\partial x^i)_p)$。对于 T_p 的元素

$$L=\sum_i a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,$$

有 T_q 的元素

$$L'=\sum_j b^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \quad \left(\text{这里的 } b^j=\sum_i\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p a^i\right)$$

和它对应，形成这个对应关系的**綫性映射** $T_p\to T_q$ 写做 $(dF)_p$，称为 F 在点 p 的**微分**。容易知道，$(dF)_p$ 不依賴于局部坐标系 (x^i), (y^j) 的取法。而且，n 行 m 列的矩陣 $((\partial y^j/\partial x^i)_p)$ 的阶数也是一个定数，它和 (x^i), (y^j) 之取法无关。这个数值叫做 $(dF)_p$ 的**阶数**（有时也称为 F 在点 p 的阶数）。

如果更有由 M_2 投射到 C^∞-流形 M_3 中的 C^∞-映射 G，則容易知道，F 和 G 之結合映射 $G\circ F$ 是由 M_1 投到 M_3 中去的 C^∞-映射，这时，

$$d(G\circ F)_p=(dG)_q\circ(dF)_p$$

是容易驗証的（$G\circ F$ 表示映射的結合（或积））。

其次，把 $(dF)_p$ 这样的綫性映射之对偶映射写成 $(\delta F)_p$，亦卽 $(\delta F)_p$ 是由 T_q^* 投到 T_p^* 中去的綫性映射，对于 T_q^* 内的元素

$$\omega=\sum_j \alpha_j(dy^j)_q,$$

有 T_p^* 内的元素

$$\theta=\sum_i\beta_i(dx^i)_p\quad\left(\text{这里的 }\beta_i=\sum_j\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p\alpha_j\right)$$

和它对应，这一对应关系是 $\theta=(\delta F)_p\omega$。因此，对于 $L\in T_p$ 有

$$((\delta F)_p\omega)(L)=\omega((dF)_p(L))$$

成立。为了看起来方便起見，用"内积記号"(ω,L)代替 $\omega(L)$，而写成

$$((\delta F)_p\omega,\ L)=(\omega,\ (dF)_pL).$$

2. 由于微分而引起的張量間的映射

設 M_1, M_2, F, p, q, (x^i), (y^j) 等所表示的意义与 §4.1 一样。由 $(dF)_p$，可以引出自 $(T_p)^r_0$（＝在点 p 的 r 阶逆变張量空間）投向 $(T_q)^r_0$ 中去的綫性映射。那就是，設 $S\in(T_p)^r_0$ 关于局部坐标系 (x^i) 的支量为 $S^{i_1\cdots i_r}$，对于 S 有关于局部坐标系 (y^j) 的支量为 $P^{j_1\cdots j_r}$ 的張量 $P\in(T_q)^r_0$ 和它对应，其对应方式是

$$P^{j_1\cdots j_r}=\sum_{i_1,\cdots,i_r}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\right)_pS^{i_1\cdots i_r}.$$

这样的綫性映射 $(T_p)^r_0\to(T_q)^r_0$ 仍写成 $(dF)_p$。它跟 §4.1 中談到的情形一样，和 (x^i)，(y^j) 的取法无关。

同样，由 $(\delta F)_p$ 可以引出自 $(T_q)^0_r$（＝r 阶协变張量空間）投向 $(T_p)^0_r$ 中去的綫性映射。那就是，对于在局部坐标系 (y^j) 之下以 $\Omega_{j_1\cdots j_r}$ 为支量的張量 $\Omega\in(T_q)^0_r$，有在局部坐标系 (x^i) 之下以 $\Theta_{i_1\cdots i_r}$ 为支量的張量 $\Theta\in(T_p)^0_r$ 和它对应，其对应方式是

$$\Theta_{i_1\cdots i_r}=\sum_{j_1,\cdots,j_r}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\right)_p\Omega_{j_1\cdots j_r}.$$

这样的綫性映射 $(T_q)^0_r\to(T_p)^0_r$ 仍写成 $(\delta F)_p$，它和 (x^i)，(y^j) 的取法无关。

从上面的式子知道，若 Ω 是反称張量，则 Θ 也是反称的。此外，还容易看出

$$(\delta F)_p(\Omega_1\otimes\Omega_2)=(\delta F)_p\Omega_1\otimes(\delta F)_p\Omega_2.$$

特别当 Ω_1, Ω_2 是反称張量时，明显地有

$$(\delta F)_p(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = (\delta F)_p\Omega_1 \wedge (\delta F)_p\Omega_2.$$

这些式子的驗証是属于綫性代数学的练习問題，讀者可以自作。

3. 函数的微分

設 f 是規定于 C^∞-流形 M 上的 C^∞-函数，也就是說 f 是由 M 投射到 R^1 中去的 C^∞-映射。如果 $p\in M$，则 $(df)_p$ 是由点 p 处的切向量空間 T_p 投射到点 $q=f(p)\in R^1$ 处的切向量空間 T_q 的綫性映射。在这里，我們可以将 R^1 之各点 q 处的切向量空間 T_q 看做是同 R^1 本身一样的。因为以 R^1 本身作为坐标邻域之自然的局部坐标系 (t)：$t(x)=x(x\in R^1)$ 在 R^1 上是存在的，因此，关于这种局部坐标系，在 $q\in R^1$ 处以 α 为支量的切向量 L，当使它和 R^1 內的元素(实数) α 成对应时，则映射 $L\to\alpha$ 就是由 T_q 投射到 R^1 上的一对一的綫性映射，由于这种关系，所以 T_q 与 R^1 可以看成是同样的(今后經常把它們看成是同样的，但不一一注明)。

从此，我們說 $(df)_p$ 是由 T_p 投射到 R^1 中去的綫性映射，也就是說 $(df)_p$ 是規定于 T_p 上的綫性形式，因此，它是 T_p 的对偶向量空間 T_p^* 內的元素。

設 $(x^1, \cdots, x^n)$ 是点 p 周圍的局部坐标系，U 是这坐标系的坐标邻域。因为各 x^i 是定义在 U 上的 C^∞-函数，故由上述知道，对于 U 內的各点 q，可以規定 $(dx^i)_q$。另一方面，作为在点 q 处的由协变向量所构成的向量空間 T_q^* 的基底，如 §3.4 所讲的，有局部坐标系 (x^i) 所定的标准基底。这一基底本来应該使用同样的記号 $(dx^i)_q$ 来标明，但目前暂記成 $(\omega^1, \cdots, \omega^n)$，这和上面提到的具有函数之微分意义的 $(dx^i)_q$ 是一致的。实际上，若把 T_q 之标准基底写成 $X_i=(\partial/\partial x^i)_q$，则对于一般在 U 上規定的 C^∞-函数 f，其 $(df)_q$ 由

$$(df)_q\left(\sum_i \alpha^i X_i\right) = \sum_i \alpha^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_q$$

所规定出，因此，作为特别情况有 $(dx^i)_q(X_j)=\delta^i_j$。从而知道

$$\omega^i=(dx^i)_q.$$

由以上的計算，还知道公式

$$(df)_q=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_q(dx^i)_q$$

成立。

4. 微分的性质

設 M_1, M_2 分别是 m, n 維的 C^∞-流形，F 是由 M_1 投射到 M_2 中去的 C^∞-映射，对于 M_1 内的一点 p，有 $q=F(p)\in M_2$ 与它对应。并設 F 在点 p 处的微分 $(dF)_p$ 的阶数为 r. 在这样的假設下，有下面 3 个定理成立。

定理 1 如果 $r=m$（即 $(dF)_p$ 是一对一的映射），那末

(1) 对于点 q 周圍的任意局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^n)$，当 (y^i) 适当地排列时，$(y^1\circ F, \cdots, y^m\circ F)$ 是点 p 周圍的局部坐标系❶。

(2) 对于点 p 周圍的任意局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^m)$，若在点 q 周圍适当地取局部坐标系 $(z^1, \cdots, z^n)$ 时，則 $x^i=z^i\circ F\ (i=1, \cdots, m)$ 在点 p 之充分小的邻域内成立。

(3) 設取 p 的某一个邻域 V，則 F 是由 V 投射到 $F(V)$ 上的拓扑映射（$F(V)$ 上的拓扑构造是由 M_2 的构造所引出的相对拓扑构造）。

証明 (1) 在点 p 的局圍任意取定一个局部坐标系 (x^i)，因矩陣 $(\partial(y^i\circ F)/\partial x^j)_p$ 之秩数为 m，且当 (y^i) 适当地排列时，可以使函數矩陣

$$\left[\frac{\partial(y^1\circ F, \cdots, y^m\circ F)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right]_p\neq 0.$$

因此，$(y^1\circ F, \cdots, y^m\circ F)$ 組成点 p 周圍的局部坐标系。

(2) 在点 q 的周圍取一个局部坐标系 (y^i)，使 $(y^1\circ F, \cdots, y^m\circ F)$

❶ 由 $r=m$，知 $m\leqslant n$。

成为点 p 周圍的局部坐标系(按照(1),这是可能的)。用这样的局部坐标系,使 C^∞-函数 x^j 采取

$$x^j=\psi^j(y^1\circ F,\ \cdots,\ y^m\circ F)\quad(j=1,\ \cdots,\ m)$$

的表示形式。由于 ψ^j 是 C^∞-函数,所以設

$$z^j=\psi^j(y^1,\ \cdots,\ y^m)\quad(j=1,\ \cdots,\ m),$$

則 $z^1,\ \cdots,\ z^m$ 是定义于点 q 之邻域內的 C^∞-函数。更以 $z^{m+1}=y^{m+1},\ \cdots,\ z^n=y^n$,則

$$\left[\frac{\partial(z^1,\ \cdots,\ z^n)}{\partial(y^1,\ \cdots,\ y^n)}\right]_q=\left[\frac{\partial(z^1,\ \cdots,\ z^m)}{\partial(y^1,\ \cdots,\ y^m)}\right]_q=\left[\frac{\partial(\psi^1,\ \cdots,\ \psi^m)}{\partial(y^1,\ \cdots,\ y^m)}\right]_q$$

之值不是 0 (因为 $(x^1,\ \cdots,\ x^m)$ 和 $(y^1\circ F,\ \cdots,\ y^m\circ F)$ 都是点 p 周圍的局部坐标系)。因此,$(z^1,\ \cdots,\ z^m,\ \cdots,\ z^n)$ 是点 q 周圍的局部坐标系,而且明显地有 $z^j\circ F=x^j$ $(j=1,\ \cdots,\ m)$。

(3) 把(2)內所述的局部坐标系 (x^i) 和 (z^j) 之坐标邻域分别記为 V 与 U。取 V 充分小,可使 $F(V)\subset U$。由(2)知道,对于 V 內的点(以坐标表示点) $(\xi^1,\ \cdots,\ \xi^m)$ 来說,F 是使 U 內的点(以坐标表示) $(\xi^1,\ \cdots,\ \xi^m,\ \cdots,\ \xi^n)$ 和它对应的映射。从这种对应的形式看来,F 是由 V 投射到 $F(V)$ 上的一对一而且往复連續的映射。

証毕

定理 2 若 $(dF)_p$ 之阶数 $r=n$ (即 $(dF)_p$ 是由 T_p 投向 T_q 上的映射),那末

(1) 对于在点 q 周圍的任意局部坐标系 $(y^1,\ \cdots,\ y^n)$,与在点 p 周圍存在的局部坐标系 $(x^1,\ \cdots,\ x^m)$ ❶,有关系

$$x^i=y^i\circ F\quad(i=1,\ \cdots,\ n).$$

(2) 对于点 p 之任意邻域 U,有 $F(U)$ 以点 q 作为內点且包含它。

証明 (1) 在点 p 周圍任取一局部坐标系 $(z^1,\ \cdots,\ z^m)$。因矩

❶ 由 $r=n$,知 $n\leqslant m$。

陣 $(\partial(y^i\circ F)/\partial z^j)_p$ 之秩数是 n，所以当 (z^j) 之順序适当地安排后，有

$$\left[\frac{\partial(y^1\circ F,\cdots,y^n\circ F)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right]_p\neq 0.$$

因此，$(y^1\circ F,\cdots,y^n\circ F,z^{n+1},\cdots,z^m)$ 組成点 p 周圍的局部坐标系。把它記为 (x^i) 便得証。

(2) 把(1)内所述的局部坐标系 (x^i)，(y^j) 之坐标邻域分别記以 U_1 和 U_2，对于 U_1 内的点 $(\xi^1,\cdots,\xi^m)$，F 是使 U_2 內的点 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 和它对应的映射。因此，对于 U_1 的任意开子集 U_0，显然 $F(U_0)$ 是 U_2 的开子集。特别当 U 是 p 的邻域时，$F(U\cap U_1)$ 是含有 $F(p)=q$ 的开集。 証毕

注意 定理1之(3)与定理2之(2)具有如下的意义：

若 $(dF)_p$ 是一一对应的，則 F（在 p 之邻域內）也是一一对应的；

若 $(dF)_p$ 是投射于上(onto)的对应，則 F（在 p 之邻域內）也是投射于上的对应。

这就是說，**由微分的性质，大体推測出映射的性质**（在点 p 的附近）。但逆命題不一定成立。例如說由 R^1 投于 R^1 上的一对一的映射 $x\to x^3$ 是拓扑映射，但 $(df)_0$ 等于 0.

定理3 設 $m=n=r$（即 M_1 与 M_2 同維，映射 F 之函数行列式在点 p 处不等于 0)，在点 p 取适当的邻域 V 和在点 q 取适当的邻域 U 时，則

(1) F 是由 V 投射到 U 上的拓扑映射。

(2) F^{-1} 是由 U 投射到 V 上的 C^∞-映射。

証明 在点 p 与 q 的周圍取局部坐标系 (x^i) 与 (y^j)，則 $x^i=y^i\circ F\,(i=1,\cdots,n)$ 成立。把它們的坐标邻域分别記为 V 与 V'。当 V 取得充分小时，就可以使 $F(V)\subset V'$。如果記 $U=F(V)$ 便得証。(函数行列式在 V 的各点上 $\neq 0$，所以由定理2之(2)知道，U 是 M_2 的开集。) 証毕

系 F 是由 n 維 C^∞–流形 M_1 投射到另一 n 維 C^∞–流形 M_2 上的一对一 C^∞–映射，如果 $(dF)_p$ 在 M_1 之各点 p 处的阶数是 n，則 F 之逆映射 F^{-1} 也是 C^∞–映射(从而 F 是 C^∞–拓扑映射)。

注意 反过来，如果 F 是 C^∞–拓扑映射，則对于各点 p，显然 $(dF)_p$ 之阶数为 n。

§5 积 流 形

1. 定义

設 M_1, M_2 各为 m, n 維的 C^∞–流形，規定 M_1, M_2 之 C^∞–流形构造的坐标邻域与局部坐标系(§2.2)分别是

$$M_1:\ \{U_j,\ \varphi_j\},$$
$$M_2:\ \{V_\lambda,\ \psi_\lambda\}.$$

关于积空間 $M_1\times M_2$ (这是满足 Hausdorff 分离公理的拓扑空間)的一个 C^∞–流形构造由

$$M_1\times M_2:\{U_j\times V_\lambda,\ (\varphi_j,\ \psi_\lambda)\}$$

所定义。这里的 $(\varphi_j,\ \psi_\lambda)$ 是由 $M_1\times M_2$ 之开集 $U_j\times V_\lambda$ 投射到 R^{m+n} 中的开集 $\varphi_j(U_j)\times\psi_\lambda(V_\lambda)$ 上去的拓扑映射，而且由

$$(\varphi_j,\ \psi_\lambda)(p,\ q)=(\varphi_j(p),\ \psi_\lambda(q))\quad (p\in U_j,\ q\in V_\lambda)$$

所定义。因为 §2.2 之条件(I)，(II)，(III) 在这时是明显成立的，所以在 $M_1\times M_2$ 上定义了一个 C^∞–流形之构造。容易知道，这种定义和分别定义 M_1 与 M_2 之 C^∞–流形构造的坐标邻域及局部坐标系的擇取无关，也就是說如果选取另外的坐标邻域与局部坐标系来定义 M_1 和 M_2 上的 C^∞–流形构造，其結果在 $M_1\times M_2$ 上規定的 C^∞–流形构造和以上所規定的是一致。这样得到的 C^∞–流形 $M_1\times M_2$ 称为 M_1 与 M_2 的**积流形**(同样，C^∞–流形 M_1, $\cdots$, M_r 的积流形 $M_1\times\cdots\times M_r$ 也可以定义)。

例 R^p 与 R^q 的积流形就是 R^{p+q}。

2. 积流形的切向量空間

对于§5.1的M_1和M_2，点p与点q周圍的局部坐标系分别为$(x^1, \cdots, x^m)$和$(y^1, \cdots, y^n)$。容易知道，$(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n)$是$M_1 \times M_2$在点$(p, q)$周圍的局部坐标系。我們还知道，射影(projection)

$$\pi_1: M_1 \times M_2 \to M_1, \quad \pi_1(p, q) = p,$$
$$\pi_2: M_1 \times M_2 \to M_2, \quad \pi_2(p, q) = q$$

总是C^∞-映射。因此，产生了由点$(p, q) \in M_1 \times M_2$处的切向量空間$T_{(p,q)}$投到在点$p \in M_1$处的切向量空間$T_p$中去的映射$(d\pi_1)_{(p,q)}$，以及由$T_{(p,q)}$投到在点$q \in M_2$处的切向量空間$T_q$中去的映射$(d\pi_2)_{(p,q)}$。这样就可以用如下的方式作出$T_{(p,q)} \to T_p \times T_q$(=向量空間之积，或解释为$T_p$与$T_q$之直和)的綫性映射$\Phi$。那就是对于$N \in T_{(p,q)}$，作

$$\Phi(N) = ((d\pi_1)_{(p,q)}(N), (d\pi_2)_{(p,q)}(N)).$$

現在要証明Φ是把$T_{(p,q)}$投射到$T_p \times T_q$上去的一对一映射。这只要注意到Φ是綫性映射，說明$\Phi(T_{(p,q)}) = T_p \times T_q$就够了。要說明这一点，可以任取$L \in T_p$和$L' \in T_q$，它們关于局部坐标系$(x^i)$，$(y^j)$的支量設为$(a^i)$，$(b^j)$。若取关于局部坐标系$(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n)$以$(a^1, \cdots, a^m, b^1, \cdots, b^n)$为支量的元素$N \in T_{(p,q)}$，則显然有$(d\pi_1)_{(p,q)}(N) = L$，$(d\pi_2)_{(p,q)}(N) = L'$。因此，$\Phi$是把$T_{(p,q)}$投到$T_p \times T_q$上的映射。

今后，在映射Φ之下，把$T_{(p,q)}$和$T_p \times T_q$看成是同样的。

§6 子 流 形

1. 定义

設M为n維C^∞-流形，N是M的子集。給予N一个拓扑与流形的构造，并使它們滿足下面条件(1)与(2)时，就称N是M的

子流形❶。

(1) 由 N 投到 M 中去的恒等映射：$\iota(x)=x$ 是 C^∞-映射。

(2) 对于 N 上的各点 p，$(d\iota)_p$ 之阶数等于 N 的維数 m（即 $(d\iota)_p$ 是一对一的綫性映射）。

因此，由于 $(d\iota)_p$，在 p 处 N 的切向量空間 $T_p(N)$ 可以同胚地映射到在 p 处之 M 的切向量空間 $T_p(M)$ 的子空間上。由于同胚的关系，今后总是把 $T_p(N)$ 和 $T_p(M)$ 之子空間看成是一样的，記以 $T_p(N)\subset T_p(M)$。

在以上的定义中，要注意的是預先規定在 N 上的拓扑构造（称为**内部拓扑**），和作为 M 之子集、由 M 的构造而在 N 上引出的**相对拓扑**之間未必一致。

特别，当 N 的内部拓扑和相对拓扑一致的时候，称 N 是**正則地嵌繼**（regularly imbedded）在 M 中的子流形（簡称为**正則子流形**）。

如果 M_1，M_2，M_3 都是 C^∞-流形，且 M_1 是 M_2 的（正則）子流形，而 M_2 是 M_3 的子流形，那末明显地 M_1 是 M_3 的（正則）子流形。

2. 开子流形

設 M 是 n 維 C^∞-流形，U 是 M 的开集（非空的）。定义 M 的 C^∞-流形构造的坐标邻域与局部坐标系設为 $\{U_j, \varphi_j\}$（§2.2）。对于 $U\cap U_j\neq 0$ 的 U_j，限制在 $U\cap U_j$ 上的 φ_j 記为 φ_j'，那末，把相对拓扑引入 U，$\{U\cap U_j, \varphi_j'\}$ 就在 U 上定义了一个 n 維的 C^∞-流形构造。容易知道，这个构造只和 M 上已給定的 C^∞-流形构造有关，而和在 M 上定义 C^∞-流形构造时选取 $\{U_j, \varphi_j\}$ 的方法无关。这样得出的 C^∞-流形 U 当然是 M 的子流形，而且是正則的。象这样給定 C^∞-流形构造的 U 称为 M 的**开子流形**。

❶ 复数解析流形之复数子流形的定义与此同样。

注意 C^∞-流形 M 的子流形为 N，N 的开集 U 含有一点 $p\in N$，如果取开集 U 充分小，则 N 的开子流形 U 是 M 的正则子流形（§4.4）。

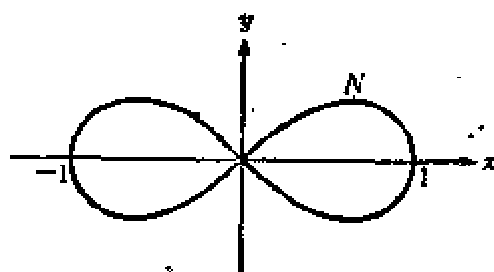


图 6.1

3．非正则子流形的例

平面 R^2 上的子集 N，由方程（直角坐标）

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

确定。(这叫双纽綫(lemniscate)。) 由于相对拓扑固然可以确定 N 内的拓扑构造，但因 N 不是一維的 C^∞-流形(只要看原点附近就知道)；因此想給 N 以 C^∞-流形构造，使它成为 R^2 的正則子流形是不可能的。不过按照下述方式，N 和 R^1 作为 C^∞-流形而論是同胚的，因而可以定义 N 的 C^∞-流形构造。那就是对于 R^1 的点 t，使 N 的点



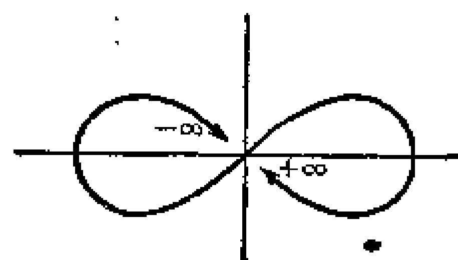


图 6.2

$$x=\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\quad y=\frac{-t(t^2-1)}{t^4+1}$$

和它对应的映射是从 R^1 投射到 N 上的一对一映射，因此，把这个映射看成是由 R^1 投到 N 上的 C^∞-拓扑映射，从而定出 N 上的 C^∞-流形构造就行了。(这就是說，把上面的 t 取作 N 上的局部坐标系就行了。)

同样，由双紐綫的另一参数表示

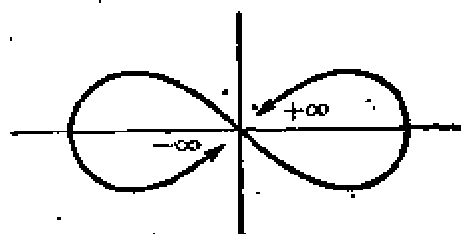


图 6.3

$$x=\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\quad y=\frac{t(t^2-1)}{t^4+1},$$

对 N 可以添入 C^∞-流形构造。从这些添进去的 C^∞-流形构造容易知道，N 成为 R^2 的一維子流形。(由上述知道，在一般的情况下，对 C^∞-流形 M 的子集 N，定义其 C^∞-流形构造使之成为 M 的子流

形的方式，虽假定了 N 的連通性，但不是唯一的。)

4. 正則子流形的性質

定理1 設 M_1, M_2 是 C^∞-流形，N 是 M_2 的子流形。F 是由 M_1 投到 M_2 中的 C^∞-映射，且滿足

(1) $F(M_1) \subset N$,

(2) F 是由 M_1^* 投到 N 中的連續映射(关于 N 的內部拓扑而言)。則 F 是由 M_1 投于 N 中的 C^∞-映射。

証明 設 M_2, N 的維数各为 m, n。取 M_1 的任意一点 p，記 $q=F(p)\in N$。由 §4.4 之定理1的(2)，取 M_2 在 q 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^m)$，就可使 $(x^1\circ\iota, \cdots, x^n\circ\iota)$ 是 N 在 q 周圍的局部坐标系。(ι 是由 N 投于 M_2 中的恒等映射。) 再設 (y^i) 是 M_1 在点 p 周圍的任意局部坐标系，由于 F 是 C^∞-映射，$x^i\circ F\ (i=1, \cdots, m)$ 在 p 之邻域內是 (y^i) 的 C^∞-函数。由假設(2)以及 $\iota: N\to M_2$ 之連續性可知，如果局部坐标系 (y^i), (x^i) 和 $(x^j\circ\iota)$ 的坐标邻域各为 V, U 和 W，則有

$$F(V)\subset W\subset U.$$

因此，$x^j\circ\iota\circ F\ (j=1, \cdots, n)$ 可以在 V 上定义，而且是 (y^i) 的 C^∞-函数。这就是說 F 是由 M_1 投到 N 中的 C^∞-映射。 証毕

系1 設 F 是由 C^∞-流形 M 投射到另一 C^∞-流形 M_2 中的 C^∞-映射，N 是 M_2 的正則子流形，且 $F(M_1)\subset N$，則 F 是由 M_1 投到 N 中的 C^∞-映射。

系2 設 C^∞-流形 M 的两个子流形 N_1 与 N_2 同是正則的，如果 N_1 和 N_2 作为 M 的子集是同等的，即 $N_1=N_2$，則 N_1 和 N_2 作为 C^∞-流形也是同等的(**正則子流形之 C^∞-流形构造的一致性**)。

注意 对于非正則的子流形，系2不一定成立。例如在 §6.3 內，R^2 中的双紐綫具有两个不同的 C^∞-流形构造。

定理2 m 維的 C^∞-流形 M，其 n 維的正則子流形为 N，在 N

内任意一点 p 的周围存在 M 的局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^m)$ 及其坐标邻域 U_1，且

$$N \cap U_1 = \{q \in U_1;\ y^j(q) = 0\ (n+1 \leqslant j \leqslant m)\}.$$

証明 在 p 周圍的 M 之局部坐标系取作 (x^i)，使 $(x^1 \circ \iota, \cdots, x^n \circ \iota)$ 是 N 在 p 周圍的局部坐标系（ι 是使 $N \to M$ 的恒等映射）。(x^i) 和 $(x^j \circ \iota)$ 的坐标邻域設为 V_1 与 V_2。因为 N 是正則的，所以当在 M 上取 p 的邻域 U 充分小时，則

$$U \subset V_1, \quad U \cap N \subset V_2.$$

又因为 $x^k \circ \iota\ (k = n+1, n+2, \cdots, m)$ 是点 p 在 N 内的邻域 $U \cap N$ 上定义的 C^∞-函数，因此可以表示成 $x^1 \circ \iota, \cdots, x^n \circ \iota$ 的 C^∞-函数：

$$x^k \circ \iota = g^k(x^1 \circ \iota, \cdots, x^n \circ \iota) \quad (n+1 \leqslant k \leqslant m).$$

这里，g^k 的定义域有如下述。即由

$$\varphi(q) = (x^1(q), \cdots, x^n(q)) \quad (q \in U)$$

所定义的映射 $\varphi: U \to R^n$，使 $U \cap N$ 的象是 $E = \varphi(U \cap N)$（E 是 R^n 的开集），从而 $U \cap N$ 上一点 q 的 m 个坐标 $a^i = x^i(q)\ (i = 1, \cdots, m)$ 满足

$$a^j = g^j(a^1, \cdots, a^n) \quad (n+1 \leqslant j \leqslant m). \tag{6.1}$$

反过来，假設 U 上一点 q 的坐标为 $a^i = x^i(q)\ (i = 1, \cdots, m)$，其前面的 n 个坐标 $(a^1, \cdots, a^n) \in E$，而其余的坐标满足 (6.1)，则 $q \in U \cap N$。这是因为，若取 $q_1 \in U \cap N$ 使 $\varphi(q_1) = (a^1, \cdots, a^n)$，則 q_1 的坐标 $b^i = x^i(q)\ (i = 1, \cdots, m)$ 满足 $a^i = b^i\ (i = 1, \cdots, n)$。从而对于 $n+1 \leqslant j \leqslant m$ 的各个 j 有

$$b^j = g^j(b^1, \cdots, b^n) = g^j(a^1, \cdots, a^n) = a^j.$$

因此，$q_1 = q$，亦即 $q \in U \cap N$。

其次，在点 p 处，于 M 内的邻域上所定义的 m 个 C^∞-函数 $y^1, \cdots, y^m$，由

$$y^i = x^i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

$$y^j = x^j - g^j(x^1, \cdots, x^n) \quad (n+1 \leqslant j \leqslant m)$$

定义出。$y^1, \cdots, y^m$ 中的每一个,可以定义在M的开集 $U_1 = \varphi^{-1}(E)$ 上(由于 $p \in U_1 \subset U$)。

今假設使 $U_1 \to R^m$ 的映射 ψ 由

$$\psi(q) = (y^1(q), \cdots, y^m(q)) \quad (q \in U_1)$$

来定义, ψ 显然是一对一的 C^∞-映射,而且在 U_1 的各点 q 上有

$$\left[\frac{\partial(y^1, \cdots, y^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right]_q = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & * & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此,(y^i) 是以 U_1 作为坐标邻域的 M 之局部坐标系。于是有

$$\begin{aligned} &\{q \in U_1;\ y^j(q) = 0 \ \ (n+1 \leqslant j \leqslant m)\} \\ &\quad = \{q \in U;\ \varphi(q) \in E,\ x^j(q) \\ &\qquad\qquad = g^j(x^1(q), \cdots, x^n(q)),\ (n+1 \leqslant j \leqslant m)\} \\ &\quad = N \cap U. \end{aligned}$$

但明显地 $N \cap U_1 \subset N \cap U$, 而且 $U_1 \supset N \cap U$, 因而有 $N \cap U_1 = N \cap U$, 因此(y^i)与 U_1 即为所求。 証毕

这个定理意味着:在任意一点的邻域内,取适当的坐标系(y^i),则关于这一坐标系,正則子流形可以用"**局部方程**"

$$y^j = 0 \quad (n+1 \leqslant j \leqslant m)$$

表示出。反之,如下的逆定理成立。

定理 3 設 m 維 C^∞-流形的子集 N, 对于某一自然数 $n(1 \leqslant n \leqslant m)$,在 N 上任意一点的周圍具有如下的局部方程,即对于 N 上一点 p,在 p 的周圍,M 的局部坐标系 (x^i) 及其坐标邻域 U 存在,而且当

$$N \cap U = \{q \in U;\ x^j(q) = 0 \quad (n+1 \leqslant j \leqslant m)\}$$

时❶，对 N 引进 C^∞–流形构造，就可以使 N 成为 M 的正则子流形。(对于这样的 N 引进 C^∞–流形构造的方式当然是唯一的。)

証明 設 N 上具有的拓扑是由 M 誘导出的相对拓扑。而且对于 N 上的各点 p，有定理中所說的 M 之局部坐标系 (x^i) 及其坐标邻域 U_p 和 p 成一一对应。当 p 在 N 上变动时，N 之开集所成的族 $\{N\cap U_p\}$ 复盖 N：$N=\bigcup(N\cap U_p)$. 由 U_p 投向 R^m 中去的一对一映射 φ_p 以

$$\varphi_p(q)=(x^1(q),\ \cdots,\ x^m(q))\quad (q\in U_p)$$

来定义，記以 $\varphi_p(U_p)=E_p$. 在 R^m 的所有点中，把形式如 $(\xi^1,\ \cdots,\ \xi^n,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 的点之全体构成的集合記为 R^n. 如把 $\varphi_p(U_p\cap N)=E_p\cap R^n$ 記为 F_p，则因 E_p 是 R^m 的开集，所以它也是 R^n 的开集。如把 φ_p 的定义域由 U_p 限制为 $U_p\cap N$，并且把所得的映射写作 ψ_p，则容易知道，ψ_p 是由 $U_p\cap N$ 投到 F_p 上的拓扑映射。这时只要驗証系統 $\{N\cap U_p,\ \psi_p\}$ (p 在 N 上变动) 满足 §2.2 的 (I)，(II)，(III) 就可以了。由上述的內容获悉，(I) 与 (II) 之滿足是不成問題的，因此只要驗証 (III) 即可。設 $(U_p\cap N)\cap(U_q\cap N)\neq 0$ $(p,\ q\in N)$. 并記

$$A=\psi_p(U_p\cap U_q\cap N),\qquad B=\psi_q(U_p\cap U_q\cap N),$$

则 A, B 各为 F_p, F_q 之开集。現在只要能說明 $\varphi_q\circ\varphi_p^{-1}:A\to R$ 与 $\varphi_p\circ\varphi_q^{-1}:B\to A$ 都是 C^∞–映射就好了。(A, B 看成是 R^n 的开子流形。)(如果能够做到这一步，则 N 是 C^∞–流形，至于 N 是 M 的子流形这一点，从 M, N 的局部坐标系之取法就可以明白。) 因此所有的問題归結为如下的引理。

---

❶ 或者取較弱的条件也行，那就是"对于 N 上各点 p，有含 p 的 M 之开集 U，以 U 作为坐标邻域，p 周圍的局部坐标系 (z^i) 以及在 U 上定义的 $m-n$ 个 C^∞–函数 $\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{m-n}$ 存在，而且它們在 U 上是彼此无关的，亦即矩陣 $(\partial\varphi_i/\partial z^j)$ 之階数等于 $m-n$，以及 $N\cap U=\{q\in U;\varphi_j(q)=0\ (1\leq j\leq m-n)\}$ 成立"。这是因为可以扩張 $\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{m-n}$ 使之成为 p 周圍的局部坐标系的緣故。

引理　M_1 与 M_2 各为 R^m 与 R^n 的开子流形，設 F 是由 M_1 投向 M_2 中的 C^∞-映射，而 L_1 和 L_2 各为 R^m 与 R^n 的綫性子空間[1]。如果

$$F(L_1\cap M_1)\subset L_2\cap M_2,$$

則定义域限制在 $L_1\cap M_1$ 上的 F 是使 L_1 的开子流形 $L_1\cap M_1$ 投向 L_2 的开子流形 $L_2\cap M_2$ 中的 C^∞-映射。

証明　适当地选取 R^m 的平行坐标系 (x^j)，可以使 L_1 具有方程 $x^j=0(\nu_1+1\leqslant j\leqslant m)$. 同样，适当选取 R^n 的平行坐标系 (y^j)，可以使 L_2 具有方程 $y^k=0(\nu_2+1\leqslant k\leqslant n)$. 这里的 ν_1 与 ν_2 是 L_1 与 L_2 的維数。因 F 是 C^∞-映射，所以 $y^j\circ F\ (j=1,\cdots,n)$ 是 $x^1,\cdots,x^m$ 的 C^∞-函数。于是 $(x^1,\cdots,x^{\nu_1})$ 和 $(y^1,\cdots,y^{\nu_2})$ 分别是 $L_1\cap M_1$ 和 $L_2\cap M_2$ 的局部坐标系，且 $y^j\circ F(j=1,\cdots,\nu_2)$ 是 $x^1,\cdots,x^{\nu_1}$ 的 C^∞-函数。命題得証。　　　　証毕

5. 作为一点的象而得出的正則子流形

下面的定理是 §6.4 定理3（"局部方程"所表示的子集是正則子流形）的变形，应用很广。

定理　設 M_1, M_2 各为 m, n 維的 C^∞-流形；F 是由 M_1 投到 M_2 中的 C^∞-映射。如果在 M_1 上的各点 p 处，F 的微分 $(dF)_p$ 的阶数与 p 的取法无关，而总是一个定值 l，則

(1) 对于 M_2 上的各点 q，其逆象 $F^{-1}(q)=\{p\in M_1; F(p)=q\}$ 或者是空集，或者是 M_1 的 $m-l$ 維正則子流形。

(2) 如果 $F^{-1}(q)=N$ 不是空集，則在点 $p\in N$ 处，C^∞-流形（在(1)之意义下）N 的切向量空間 $T_p(N)$ 等于 $(dF)_p$ 的核：

$$T_p(N)=\{L\in T_p(M_1);\ (dF)_p(L)=0\}.$$

証明　(1) 假設 $F^{-1}(q)=N$ 不是空集，$p\in N$. 在点 p, q 周

---

[1] 亦即設它們是向量空間 R^m 与 R^n 的子空間。这时由 L_i 的平行坐标系，可以在 L_i 内定义 C^∞-流形构造(§2.3，例3)。L_1, L_2 是 R^m 和 R^n 的正則子流形。

圍，M_1 和 M_2 的局部坐标系各为 (x^i) 和 (y^j)。在点 p 的邻域内，有

$$y^j\circ F=\theta^j(x^1, \cdots, x^m) \quad (j=1, \cdots, n)$$

($\theta^1, \cdots, \theta^n$ 是 C^∞-函数)。由于矩陣 $(\partial\theta^j/\partial x^i)_p$ 的秩等于 l，所以当把局部坐标系 (x^i)，(y^j) 适当地安排时，可以使

$$\left[\frac{\partial(\theta^1, \cdots, \theta^l)}{\partial(x^1, \cdots, x^l)}\right]_p \neq 0.$$

这样，$(\theta^1, \cdots, \theta^l, x^{l+1}, \cdots, x^m)$ 就成为点 p 周圍的局部坐标系。用这个局部坐标系来代替 (x^i) 时，只要写

$$\theta^i(x^1, \cdots, x^m)=x^i \quad (i=1, \cdots, l)$$

郎可。由于在点 p 的某一邻域 V_0 上，有

$$0=\frac{\partial(\theta^1, \cdots, \theta^l, \theta^i)}{\partial(x^1, \cdots, x^l, x^j)}=\begin{vmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & * & & \dfrac{\partial\theta^i}{\partial x^j} \end{vmatrix}=\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j} \quad \begin{pmatrix} i=1, \cdots, n \\ j=l+1, \cdots, m \end{pmatrix}$$

成立，所以在 V_0 上，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ 仅是 $x^1, \cdots, x^l$ 的函数。这时若以 $a^j=y^j(q)$ $(j=1, \cdots, n)$，則

$$\begin{aligned} N\cap V_0&=\{p'\in V_0;\ \theta^j(p')=a^j \quad (j=1, \cdots, n)\} \\ &=\{p'\in V_0;\ x^i(p')=a^i \quad (i=1, \cdots, l)\}. \end{aligned}$$

因此，由 §6.4 的定理 3[1]，当适当地引进 C^∞-流形构造时，N 就成为 M_1 的 $m-l$ 維正則子流形。

(2) 由 W 投向 M_1 中的恒等映射設为 ι，更注意到在 N 的一点 p 上的切向量空間 $T_p(N)$ 可以和 $T_p(M_1)$ 的子空間 $(d\iota)_pT_p(N)$ 同等看待。如果使用(1)的記号，則 $(x^{l+1}\circ\iota, \cdots, x^m\circ\iota)$ 与 $(x^1, \cdots, x^m)$ 分别是 N 与 M_1 在点 p 周圍的局部坐标系。因此，属于 $T_p(N)$ 的切向量 L 在其局部坐标系下的支量如果是 $(a^{l+1}, \cdots, a^m)^*$，則 L

[1] 这里为什么也可以取作 $a^1=\cdots=a^n=0$，只要以 y^j-a^j 代替 y^j 就立刻可以知道。

的象 $(d\iota)_p L$ 的支量将是 $(0,\cdots,0,a^{l+1},\cdots,a^m)$。这就是説，$T_p(N)$ 是由 $T_p(M_1)$ 的元素中，支量（关于局部坐标系 (x^i) 而言）具有形式为 $(0,\cdots,0,a^{l+1},\cdots,a^m)$ 的那些元素之全体所組成的子空間。另一方面，如 $T_p(M_1)$ 中的元素 A 关于局部坐标系 (x^i) 之支量为 $(a^1,\cdots,a^m)$，則 A 之象 $(dF)_p A=B$ 关于局部坐标系 (y^j) 的支量 $(b^1,\cdots,b^n)$ 由

$$b^j=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta^j}{\partial x^i}\right)_p a^i \quad (j=1,\cdots,n)$$

給定。由 $\theta^i(x^1,\cdots,x^m)=x^i\ (i=1,\cdots,l)$，得到

$$b^i=a^i \quad (i=1,\cdots,l).$$

由于 $\theta^1,\cdots,\theta^n$ 仅是 $x^1,\cdots,x^l$ 的函数，所以

$$b^j=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta^j}{\partial x^i}\right)_p a^i=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta^j}{\partial x^i}\right)_p b^i \quad (l+1\leqslant j\leqslant n).$$

因此，要 $B=0$，其充分必要条件是 $b^1=\cdots=b^l=0$。这意味着 A 属于 $T_p(N)$。因此，$T_p(N)$ 等于 $(dF)_p$ 之核。 証毕

例 1 $M_1=R^m$ 的开子流形設为 $M_2=R^n$。若 $f^i(x^1,\cdots,x^m)\ (i=1,\cdots,n)$ 是定义于 M_1 上的 n 个 C^∞-函数，則 C^∞-映射 $F:M_1\to R^n$ 由 $F(p)=(f^1(p),\cdots,f^n(p))\ (p\in M_1)$ 規定出。当矩陣 $(\partial f^i/\partial x^j)$ 之秩在 M_1 上如取定値 l 时，由

$$\left.\begin{array}{l} f^1(x^1,\cdots,x^m)=C^1 \\ f^2(x^1,\cdots,x^m)=C^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^n(x^1,\cdots,x^m)=C^n \end{array}\right\} \quad (C^i\text{ 是常数}) \tag{1}$$

之解 $(x^1,\cdots,x^m)$ 所組成的 M_1 之子集 N，或为空集，或为 M_1 之 $m-l$ 維的正則子流形。显然 N 是 M_1 之閉子集。(1) 称为 N 之**隐函数表示**或 N **之方程**。

在 N 的点 $p=(a^1,\cdots,a^m)$ 上的切向量空間是 $T_p(N)$，求其隐伏于 $T_p(M_1)$ 中的方程。关于局部坐标系 (x^i)，設 $T_p(M_1)$ 之元素 A 的支量为 $(\xi^1,\cdots,\xi^m)$，由定理之 (2) 知道，A 属于 $T_p(N)$ 的必要充分条件是 (ξ^i) 满足联立一次方程組

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_p \xi^j=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{2}$$

这就是說，(2) 是子流形 (1) 的切向量空間的方程。

例 2 在(n 維球面) R^{n+1} 上定义的 C^∞-函数 $F(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2$ (平方和)規定了由 R^{n+1} 投向 R^1 中的 C^∞-映射。从 R^{n+1} 中除去原点之外所得的开集記为 M_1，在 M_1 上 F 之微分 dF 具有一定的阶数 $l=1$，因此，由 $\sum(x^i)^2=1$ 这样的方程所定义的 M_1 之子集 S^n 是 M_1(从而是 R^{n+1})的 n 維正則子流形。S^n 称为 **n 維球面** (或 n 維球)。当 $n=2$，即当 S^2 时的局部坐标系的作法在 §1 中會經敘述过。这一方法可以直接地扩充到 S^n 的情形。S^n 的切向量空間之方程是

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p \xi^i=0.$$

§7 張量場

1. 向量場

設 M 是 n 維的 C^∞-流形，U 为其子集。对于 U 的各点 p，有在 p 处的 M 之切向量空間 T_p 的一个元素 L_p 和它对应。形成这种对应的映射 L 称为在 U 上定义的 M 之(逆变) **向量場**❶，U 称为这个向量場 L 的定义域。同样，对于 U 的各点 p，使 T_p^* 的一个元素 ω_p 和它对应的映射 ω，称为在 U 上定义的**协变向量場**，U 称为 ω 的定义域。有时也称协变向量場为 **Pfaff 形式**。

2. 張量場

扩充向量場的概念，就得到張量場的概念。对于 M 的子集 U 上的各点 p，使 p 处的一定型 $[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t]$ 的張量❷ S_p 和它对应，其映射 S 就称为在 U 上定义的型 $[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t]$ 的**張量場**，U 称为 S 的定义域。特别当 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_t=1$ 时，S 叫做 t 次的逆变張量場，$\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_t=-1$ 时，S 叫做 t 次的协变張量場。还有在使用"場"这个名詞时，在 U 上定义的实函数 f 也可以叫做**数量場**。t 次的反称协变張量場也可以称为 t 次的**外微分形式**。数量場可以称为

---

❶ 詳言之，称为逆变向量場，或簡称为向量場。逆变向量場有时也叫做无穷小变換，关于它以后还将提到(§7.5)。

❷ 記号 $[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t]$ 的意义，請注意 §3.5 之附注。

0 次的外微分形式。1 次的外微分形式就是 Pfaff 形式。

3. 張量場的运算

对应于張量之和、数值倍积、張量积、縮約、反称化等运算，对張量場也可以定义同样的运算。例如，对于向量場 A 与 B，其和 $A+B$ 是由 $(A+B)_p=A_p+B_p$ 所定义的向量場。而从 U 上的向量場 $X_1, \cdots, X_r$ 以及 U 上的 r 次协变張量場 S，可以得出 U 上的函数(数量場) $S(X_1, \cdots, X_r)$。

4. 張量場之支量，連續性及可微性

以下設張量場 S 的定义域 U 是 M 的开集。关于 U 内一点 p 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，設 S_p 的支量为 $S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$。如 (x^i) 之坐标邻域是 V (取 $V\subset U$)，则 $S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是在 V 上定义的实函数，这函数就称为 S **关于局部坐标系 (x^i) 的支量**。因此，張量的运算与支量的关系(§ 3.7)可以照样地扩充到張量場。

所謂張量場 S 在定义域 U 上**連續**，就是指对于 U 的各点 p，取其周圍的一个局部坐标系 (x^i)，S 关于 (x^i) 的支量 $S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 在 (x^i) 的坐标邻域 $V(\subset U)$ 上是連續的。如 $S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 在 V 上是 C^ν-函数，则称 S 是 **C^ν-級的張量場**(簡称为 C^ν-張量場)。

S 关于点 p 周圍的另一局部坐标系 $(\bar{x}^i)$ 的支量設为 $\bar{S}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$，则由張量的支量变换法则知道，若 $S^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 連續(或是 C^ν)，则 $\bar{S}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 也連續(或为 C^ν)❶。因此，張量場的連續性与 C^ν-性的定义实际上和局部坐标系的取法无关。

容易知道，对 C^ν-張量場进行和、縮約、張量积、反称化等运算后所得到的張量場仍是 C^ν-張量場。

例 1 設 M 上的一点 p 周圍的局部坐标系 (x^i) 之坐标邻域为 V。对于 V 之各点 q，使 $T_q(M)$ 的元素 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$ 和它对应的映射是在 V 上定义的向量

❶ 在 (x^i) 的坐标邻域 V 与 $(\bar{x}^i)$ 的坐标邻域 W 所成的交集 $V\cap W$ 上。

場，以 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 表示。它关于局部坐标系(x^i)的支量是

$$(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \quad (\text{第 } i \text{ 項是 } 1),$$

所以 $\partial/\partial x^i$ 是 C^∞-向量場。

其次，对于 V 的各点 q，使 $T_q^*(M)$ 的元素 $(dx^i)_q$ 和它对应的映射是在 V 上定义的 Pfaff 形式（协变向量場），以 dx^i 表示。dx^i 是 C^∞-Pfaff 形式。

例 2 設有在 M 之开集 U 上定义的 C^ν-函数 f。对于 U 的各点 p，使 f 的微分 $(df)_p$ 和它对应的映射是在 U 上定义的 Pfaff 形式，記以 df。在 U 的各点上

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (dx^i)_p$$

成立，亦即

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i.$$

因此，df 关于(x^i) 的支量是 $(\partial f/\partial x^1, \cdots, \partial f/\partial x^n)$，从而 df 是 $C^{\nu-1}$-Pfaff 形式。特別当 f 是 C^∞-函数时，df 則是 C^∞-Pfaff 形式。

例 3 在局部坐标系(x^i)的坐标邻域 V 上，

$$dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r}$$

是 C^∞-协变張量場，其反称化

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

是 C^∞-外微分形式。因而，如 $f_{i_1 \cdots i_r}$ $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n)$ 是在 V 上定义的 $\binom{n}{r}$ 个 C^ν-函数，則

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \tag{1}$$

是 C^ν-外微分形式。

反之，設 ω 是 V 上定义的 r 次外微分形式，且可以用形式(1)来表示时，則因 $f_{i_1 \cdots i_r}$ 除去符号与一定倍数外，是 ω 的支量（§ 3.12 之末），所以，如果 ω 是 C^ν 的，則所有的 $f_{i_1 \cdots i_r}$ 都是 C^ν 的。

5. 向量場內規定的微分运算子

假設在 C^∞-流形 M 之开集 U 上定义了 C^ν-数量場 f 与向量場 L。若关于 U 上一点 p 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，L 之支量是 $(\xi^1, \cdots, \xi^n)$，則

$$L=\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}.$$

ξ^i 是在(x^i)的坐标邻域$V(\subset U)$上定义的函数。又

$$\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i}}\right)_{p}\tag{7.1}$$

之值仅与 p, f 及 L 有关,而与局部坐标系(x^i)的取法无关。这是容易看出的。实际上,在p的周围取另一局部坐标系$(\bar{x}^i)$,关于它,L之支量記以$(\bar{\xi}^i)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}^{i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^{i}}\right)_{p}=\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{j}}\right)_{p}\xi^{j}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{k}}\right)_{p}\left(\frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}}\right)_{p}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\xi^{j}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{j}}\right)_{p}.$$

因为(7.1)只与p, f 及 L 有关,所以把(7.1)記作$(Lf)_p$。对于U的各点p,使实数$(Lf)_p$和它对应的函数記成Lf。由(7.1)清楚地知道,当f与L都是C^∞时,函数Lf也是C^∞的。因此,在U上有一个C^∞-向量場L时,在U上定义的C^∞-函数(=C^∞-数量場)之全体所成的集合$\mathfrak{F}_U$投向$\mathfrak{F}_U$中去的映射(用同一文字L表示)就确定了。这个映射$L:\mathfrak{F}_U\to\mathfrak{F}_U$称为由$L$所规定的$\mathfrak{F}_U$之**微分运算子**。設$L$, L_1, L_2是U上的C^∞-向量場,f, f_1, f_2是$\mathfrak{F}_U$内的元素,λ_1和λ_2是实数,则容易知道,以下几个公式成立。

$$L(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1(Lf_1)+\lambda_2(Lf_2),\tag{7.2}$$

$$(\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2)(f)=\lambda_1(L_1 f)+\lambda_2(L_2 f).\tag{7.3}$$

而且,当f_1与f_2只在点p之某一邻域上是一致时,有

$$(Lf_1)_p=(Lf_2)_p.$$

如果L_1与L_2只在点p之某一邻域上是一致时,则下式成立:

$$(L_1 f)_p=(L_2 f)_p.$$

在开集U上定义的C^∞-向量場之全体写成$\mathfrak{X}_U$。現設点p周圍的局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$之坐标邻域就是U,$\mathfrak{X}_U$的元素L关于局部坐标系(x^i)的支量(ξ^i)明显地由

$$Lx^i=\xi^i \quad (i=1, \cdots; n)$$

所給定。因此，$\mathfrak{X}_U$ 內的二个元素 L_1 与 L_2 規定 $\mathfrak{F}_U$ 的同一运算子时，則 $L_1=L_2$。

定理 設 U 是 M 的开集，L 是 U 上的 C^∞-向量場；$f_1, \cdots, f_r$ 是 $\mathfrak{F}_U$ 內的元素，$\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_r)$ 是 r 个变数的 C^∞-函数，复合函数 $f=\varphi(f_1, \cdots, f_r)$ 在 U 上假定是存在的（从而，f 也是 $\mathfrak{F}_U$ 內的元素），則

$$Lf=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i}\right)_{\zeta_j=f_j} Lf_i.$$

这里的 $(\partial\varphi/\partial\zeta_i)_{\zeta_j=f_j}$ 表示在 $\partial\varphi/\partial\zeta_i$ 里以 $\zeta_1=f_1, \cdots, \zeta_r=f_r$ 代入后所得的在 U 上之 C^∞-函数。

証明 从直接計算就可以知道。亦卽，如 (ξ^i) 是 L 的支量，則得

$$Lf=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=\sum_{i,j}\xi^i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_j}\right)_{\zeta_k=f_k}\frac{\partial f_j}{\partial x^i}$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_j}\right)_{\zeta_k=f_k} Lf_j. \qquad \text{証毕}$$

例 1 对于 $\varphi(\xi, \eta)=\xi\eta$，利用上面的定理，則有

$$L(fg)=Lf\cdot g+f\cdot Lg.$$

例 2 設 f 在点 p 的邻域上，而且关于 p 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$（假定 $x^i(p)=0,\ i=1, \cdots, n$），$f$ 可以展开为冪級数

$$f=a_0+\sum a_i x^i+\sum a_{ij}x^i x^j+\cdots.$$

这时，因 $a_i=(\partial f/\partial x^i)_p$，所以

$$Lf=\sum_{i=1}^{n}\xi^i a_i \quad (\xi^i \text{ 是 } L \text{ 之支量}).$$

6. 向量場的交換子积

在 C^∞-流形 M 的开集 U 上定义的 C^∞-向量場之全体写成 $\mathfrak{X}_U$，对于 $\mathfrak{X}_U$，其中二元素之和、实数倍等运算都是可以定义的。此外，对于 $\mathfrak{X}_U$ 內的元素 L 与 $\mathfrak{F}_U$ 的元素 f，可以定义 L 之 f 倍 fL，

而对于 U 的各点 p，使 $f(p)L_p$ 和它对应的向量場也可以定义。显然，fL 也是 $\mathfrak{X}_U$ 内的元素❶。另外，以下几个公式的成立也是显然的。($f, f_i, g\in\mathfrak{F}_U$; $L, L_i\in\mathfrak{X}_U$.)

$$(fL)g=f\cdot Lg,\quad (fg)L=f(gL),\quad 1\cdot L=L,$$

$$(f_1+f_2)L=f_1L+f_2L,\quad f(L_1+L_2)=fL_1+fL_2.$$

以下定义 $\mathfrak{X}_U$ 内二元素 A 与 B 的变换子积。在 U 的点 p 的周围取局部坐标系 (x^i)，关于它，設 A, B 的支量各为 (a^i)，(b^i)。这时，在点 p 的邻域上定义的向量場

$$\sum_{i=1}^{n}(Ab^i-Ba^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(a^j(x)\frac{\partial b^i}{\partial x^j}-b^j(x)\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{7.4}$$

事实上和局部坐标系 (x^i) 之取法无关。这是因为，若在点 p 周围另取其他局部坐标系 $(\bar{x}^i)$，关于它，設 A, B 之支量是 $(\bar{a}^i)$，$(\bar{b}^i)$，则因

$$\bar{a}^i=\sum(\partial\bar{x}^i/\partial x^j)a^j,\qquad \bar{b}^i=\sum(\partial\bar{x}^i/\partial x^j)b^j,$$

所以

$$\sum_i\left\{\sum_j\left(\bar{a}^j\frac{\partial\bar{b}^i}{\partial\bar{x}^j}-\bar{b}^j\frac{\partial\bar{a}^i}{\partial\bar{x}^j}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i}$$

$$=\sum_{i,h}\left\{\sum_{j,k,l}\left(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}a^k\frac{\partial\bar{b}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}-\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}b^k\frac{\partial\bar{a}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\right)\right\}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^h}.$$

在这式里以

$$\frac{\partial\bar{b}^i}{\partial x^l}=\sum_j\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^j\partial x^l}b^j+\sum_j\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial b^j}{\partial x^l},$$

$$\frac{\partial\bar{a}^i}{\partial x^l}=\sum_j\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^j\partial x^l}a^j+\sum_j\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial a^j}{\partial x^l}$$

代进，由于 $\partial^2\bar{x}^i/\partial x^j\partial x^l$ 关于 j, l 具有对称性，所以式子的左边等于(7.4)。

---

❶ 虽然 $fL\in\mathfrak{X}_U$，但如所述，Lf 乃是 $\mathfrak{F}_U$ 的元素。因此必须注意，当 L 与 f 的顺序不同时，含义是不同的。

既然(7.4)和局部坐标系 (x^i) 之取法无关，所以当(7.4)在 U 上的各点 p 之值确定后，由 A 与 B 在 U 上定义的向量場也就确定了。这样定义的向量場記作$[A, B]$，称为 A 与 B 之**交换子积**或**括号积**。$[A, B]$ 仍是 $\mathfrak{X}_U$ 内的元素，这是因为从(7.4)就明白 $[A, B]$ 也是 C^∞-向量場。

定理 (1) 用$[A, B]$确定的 $\mathfrak{F}_U$ 之微分运算子，是由

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad (f \in F_U^\infty)$$

所給定的。

(2) $[A, B] = -[B, A]$, $[A, A] = 0$.

(3) 如 $B, A_1, A_2 \in \mathfrak{X}_U$; λ_1, λ_2 是实数；则

$$[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = \lambda_1 [A_1, B] + \lambda_2 [A_2, B],$$

$$[B, \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2] = \lambda_1 [B, A_1] + \lambda_2 [B, A_2],$$

$$[\lambda_1 A_1, A_2] = [A_1, \lambda_1 A_2] = \lambda_1 [A_1, A_2].$$

(4) Jacobi 恒等式：如 $A, B, C \in \mathfrak{X}_U$，则

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

証明 (1) 从$[A, B]$之定义式(7.4)，即知

$$[A, B]f = \sum_{i,j} a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \sum_{i,j} b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

另一方面有

$$A(Bf) - B(Af) = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j a^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{ij} a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{ij} (a^i b^j - a^j b^i) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

由于右边最后一項等于0，所以得到所求等式。

(2)，(3) 由定义式(7.4)自明。

(4) 設 $A, B, C, [A, B]$ 之支量分别是 a^i, b^i, c^i, d^i；并写 $\partial a^i / \partial x^j = a^i_{,j}$, $\partial^2 a^i / \partial x^j \partial x^l = a^i_{,jl}$，则由(7.4)知道$[[A, B], C]$之第 i 个支量是

$$\sum_j (d^j c^i_{,j} - c^j d^i_{,j})$$
$$= \sum_{j,k} (a^k b^j_{,k} - b^k a^j_{,k})\, c^i_{,j} - \sum_{j,k} c^j (a^k_{,j} b^i_{,k} + a^k b^i_{,kj} - b^k_{,j} a^i_{,k} - b^k a^i_{,kj})$$
$$= \sum_{j,k} (a^k b^j_{,k} c^i_{,j} - a^j_{,k} b^k c^i_{,j} - a^k_{,j} b^i_{,k} c^j + a^i_{,k} b^k_{,j} c^j)$$
$$+ \sum_{j,k} (a^k b^i_{,kj} c^j - a^i_{,kj} b^k c^j).$$

$[[B, C], A]$, $[[C, A], B]$之第 i 个支量可以从上式巡廻地調換 a, b, c 得到。这样获得的三个支量相加，可完全互消而等于 0。

注意　(4) 的另一証法。把 $[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B]$ 写成 D，因 D 的支量是 Dx^i，所以只要能說明 $Dx^i=0$ 就好了。因此，对于一般的 C^∞-函数 f，能說明 $Df=0$ 就够了。在式

$$[[A, B], C]f = [A, B](Cf) - C([A, B]f)$$
$$= A(B \cdot Cf) - B(A \cdot Cf) - C(A \cdot Bf) + C(B \cdot Af)$$

内；巡廻地調換 A, B, C，并把所得的式子加在一起，則右边互消而得 0。

7. 对外微分形式的外微分运算

在 n 維 C^∞–流形 M 之开集 U 上定义的 r 次 C^∞–外微分形式 ω（$=r$ 次的 C^∞–反称协变張量場）給定时，可以利用如下的处理作出在 U 上定义的 $r+1$ 次 C^∞–外微分形式。首先取 U 上一点 p 之周圍的局部坐标系(x^i)，使其坐标邻域 V 被包含于 U 内。設 ω 关于(x^i)的支量为 $P_{i_1\cdots i_r}$：

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_r} P_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} = \sum_{i_1,\cdots,i_r} P_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

为了簡单起見，写

$$\frac{\partial P_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^{i_{r+1}}} = P_{i_1\cdots i_r, i_{r+1}}.$$

（$P_{i_1\cdots i_r, i_{r+1}}$ 一般并不是 $r+1$ 次的协变張量之支量。）如果量 $S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ 以

$$S_{i_1\cdots i_{r+1}} = \frac{1}{r+1}\{P_{i_2 i_3\cdots i_{r+1}, i_1} - P_{i_1 i_3\cdots i_{r+1}, i_2} + \cdots + (-1)^r P_{i_1\cdots i_r, i_{r+1}}\}$$
$$= \frac{1}{r+1}\sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{l-1} P_{i_1\cdots i_{l-1} i_{l+1}\cdots i_{r+1}, i_l} \qquad (7.5)$$

来定义，则 $S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ 关于标数 $i_1, \cdots, i_{r+1}$ 是反称的。亦即对于 1, $\cdots$, $r+1$ 之任意置换 σ,

$$S_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r+1)}}=\varepsilon(\sigma)S_{i_1\cdots i_{r+1}} \quad (\varepsilon(\sigma)=\sigma \text{ 的符号}) \tag{7.6}$$

成立。要說明这桩事实，只要对 σ 是互换的情形加以說明就够了。例如說 σ 是使 1 与 2 調位的互换，則

$$\begin{aligned}S_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r+1)}}&=S_{i_2 i_1 i_3\cdots i_{r+1}}\\&=\frac{1}{r+1}\{P_{i_1 i_3\cdots i_{r+1}, i_2}-P_{i_2 i_3\cdots i_{r+1}, i_1}+P_{i_2 i_1 i_4\cdots i_{r+1}, i_3}-\cdots\\&\quad+(-1)^r P_{i_2 i_1 i_3\cdots i_r, i_{r+1}}\}.\end{aligned}$$

由于 $P_{j_1 j_2\cdots j_r, j_{r+1}}$ 关于 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 是反称的，所以上式等于 $-S_{i_1 i_2 i_3\cdots i_r, i_{r+1}}$[1].

由 $S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ 之反称性(7.6)知道，在 V 上定义的 $r+1$ 次 C^∞-协变張量場

$$\theta=\sum_{i_1,\cdots,i_{r+1}} S_{i_1\cdots i_{r+1}} dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_{r+1}}$$

是反称的，亦即 θ 是 $r+1$ 次的 C^∞-外微分形式。因此，θ 等于其反称化 $A(\theta)$：

$$\theta=A(\theta)=\sum_{i_1,\cdots,i_{r+1}} S_{i_1\cdots i_{r+1}} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}.$$

由于 θ 是从 ω 定出来的，而且在作出 θ 时使用了局部坐标系 (x^i)，所以把 θ 写成

$$\theta=d_x\omega.$$

但这里必須注意的是 **θ 其实和局部坐标系的取法无关**。这就是說，如果在点 p 的周圍另取其他局部坐标系 $(\bar{x}^i)$，其坐标邻域为 $W(\subset U)$，和作 θ 的方法一样，利用 $(\bar{x}^i)$ 由 ω 作出 $r+1$ 次外微分形式

$$\bar{\theta}=d_{\bar{x}}\omega,$$

---

[1] 实际上，$P_{i_1\cdots i_r, i_{r+1}}$ 关于 $i_1, \cdots, i_{r+1}$ 經反称化以后的量如果写为 $Q_{i_1\cdots i_{r+1}}$，那末稍經計算就知道 $S_{i_1\cdots i_{r+1}}=Q_{i_{r+1} i_1\cdots i_r}$，証明从略，請讀者作为练习去作。

则在 $V\cap W$ 上(特别在点 p 上),

$$\theta=\bar{\theta} \tag{7.7}$$

成立。要說明这一事实,只要能說明对于在 V 上定义的任意 $r+1$ 个 C^∞-向量場 $X_1, \cdots, X_{r+1}$, V 上的 C^∞-函数 $\theta(X_1, \cdots, X_{r+1})$ 与局部坐标系(x^i)之选擇无关就可以了。这是因为,这时在 $V\cap W$ 上任意一点 q 的周圍取局部坐标系(z^i),以 $\partial/\partial z^i=Z^i$,則在点 q 处

$$\theta(Z_{i_1}, \cdots, Z_{i_{r+1}})=\bar{\theta}(Z_{i_1}, \cdots, Z_{i_{r+1}}) \quad (1\leqslant i_1, \cdots, i_{r+1}\leqslant n)$$

当然成立。这意味着,关于 (z^i), θ 和 $\bar{\theta}$ 的支量是相等的,因此,在 $V\cap W$ 上(7.7)成立。要說明 (7.7) 成立,只要能証明下述定理就够了。

定理1 設 C^∞-流形 M 的开集 U 上定义的 r 次 C^∞-外微分形式为 ω, U 上一点 p 周圍的局部坐标系为 (x^i),其坐标邻域为 $V(\subset U)$。以 $\theta=d_x\omega$。如果 $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 是在 V 上定义的任意 $r+1$ 个 C^∞-向量場,則在 V 上有等式

$$\begin{aligned}\theta(X_1, \cdots, X_{r+1})&=\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i\cdot\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{r+1})\\&\quad+\frac{1}{r+1}\sum_{k<l}(-1)^{k+l}\\&\quad\cdot\omega([X_k, X_l], X_1, \cdots, X_{k-1}, X_{k+1}, \cdots, X_{l-1}, X_{l+1}, \cdots, X_{r+1})\end{aligned}$$

成立。(这里的 $X_i\cdot\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{r+1})$ 表示对于在 V 上的 C^∞-函数 $\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{r+1})$ 施行向量場 X_i 所定的微分运算子后所得到的 C^∞-函数。)

証明 在 V 上設

$$\omega=\sum P_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

$$\theta=\sum S_{i_1\cdots i_{r+1}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}.$$

($S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ 由(7.5)給定。)且以

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{i}{\xi}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (i=1, \cdots, r+1),$$

以 $\underset{i}{\xi}^{\alpha}_{,j}$ 表示 $\partial \underset{i}{\xi}^{\alpha}/\partial x^{j}$ 的簡略写法，即偏微分运算略記为 $,j$（在証明过程中，利用总和記号的省略規約），則

$$(1)\quad (r+1)\theta(X_1, \cdots, X_{r+1}) \doteq S_{i_1\cdots i_{r+1}} \underset{1}{\xi}^{i_1} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{i_{r+1}}$$

$$= \sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{l-1} P_{i_1\cdots\hat{i}_l\cdots i_{r+1}, i_l} \underset{1}{\xi}^{i_1} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{i_{r+1}}.\text{❶}$$

另一方面，从 $[X_k, X_l] = (\underset{k}{\xi}^{\alpha} \underset{l}{\xi}^{\beta}_{,\alpha} - \underset{l}{\xi}^{\alpha} \underset{k}{\xi}^{\beta}_{,\alpha})\, \partial/\partial x^{\beta}$ 知道，

$(r+1)\times$（待証明的式子之右边）

$$= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \underset{i}{\xi}^{\alpha} (P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}} \underset{1}{\xi}^{k_1} \cdots \underset{i}{\hat{\xi}}^{k_i} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{k_{r+1}})_{,\alpha}$$

$$+ \sum_{k<l} (-1)^{k+l} P_{s_0\cdots\hat{s}_k\cdots\hat{s}_l\cdots s_{r+1}} (\underset{k}{\xi}^{\alpha} \underset{l}{\xi}^{s_0}_{,\alpha} - \underset{l}{\xi}^{\beta} \underset{k}{\xi}^{s_0}_{,\beta})\, \underset{1}{\xi}^{s_1} \cdots \underset{k}{\hat{\xi}}^{s_k} \cdots \underset{l}{\hat{\xi}}^{s_l} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{s_{r+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \underset{i}{\xi}^{\alpha} P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}, \alpha} \underset{1}{\xi}^{k_1} \cdots \underset{i}{\xi}^{k_i} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{k_{r+1}} + \Omega + \Omega'.$$

这里

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \underset{i}{\xi}^{\alpha} P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}} (\underset{1}{\xi}^{k_1} \cdots \underset{i}{\hat{\xi}}^{k_i} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{k_{r+1}})_{,\alpha},$$

$$\Omega' = \sum_{k<l} (-1)^{k+l} P_{s_0\cdots\hat{s}_k\cdots\hat{s}_l\cdots s_{r+1}} (\underset{k}{\xi}^{\alpha} \underset{l}{\xi}^{s_0}_{,\alpha} - \underset{l}{\xi}^{\beta} \underset{k}{\xi}^{s_0}_{,\beta})\, \underset{1}{\xi}^{s_1} \cdots \underset{k}{\hat{\xi}}^{s_k} \cdots \underset{l}{\hat{\xi}}^{s_l} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{s_{r+1}}.$$

由 (1)，

$$\text{上面的式子} = (r+1)\theta(X_1, \cdots, X_{r+1}) + \Omega + \Omega',$$

所以只要 $\Omega+\Omega'$ 等于 0 就可以了。展开 Ω 与 Ω'，它們的項数相同，而且对应項的符号恰好相反。事实上，对应于 Ω 内的項

$$(-1)^{i+1} P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}} \underset{i}{\xi}^{\alpha} \underset{1}{\xi}^{k_1} \cdots \underset{i}{\hat{\xi}}^{k_i} \cdots \underset{j}{\xi}^{k_j}_{,\alpha} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{k_{r+1}} \quad (i<j),$$

在 Ω' 内有

$$(-1)^{i+j} P_{s_0\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_{r+1}} \underset{i}{\xi}^{\alpha} \underset{j}{\xi}^{s_0}_{,\alpha} \underset{1}{\xi}^{s_1} \cdots \underset{i}{\hat{\xi}}^{s_i} \cdots \underset{j}{\hat{\xi}}^{s_j} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{s_{r+1}}.$$

双方关于 $\underset{1}{\xi}^{k_1} \cdots \underset{i}{\xi}^{\alpha} \cdots \underset{j}{\xi}^{k_j}_{,\alpha} \cdots \underset{r+1}{\xi}^{k_{r+1}}$ 的系数是

---

❶ $\hat{i}_l$ 表示除外的記号。亦即从 $i_1\cdots i_{r+1}$ 中除去 i_l 的意思。

(2) $\Omega\cdots(-1)^{i+1}P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}}$,

(3) $\Omega'\cdots(-1)^{i+j}P_{k_jk_1\cdots\hat{k}_i\cdots\hat{k}_j\cdots k_{r+1}}$.

由于 $P_{j_1\cdots j_r}$ 关于 $j_1, \cdots, j_r$ 是反称的，因此(3)可以写成

$$(-1)^{i+j}P_{k_jk_1\cdots\hat{k}_i\cdots\hat{k}_j\cdots k_{r+1}}=(-1)^{i+j}(-1)^{j-2}P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}}.$$

事实上，这是(2)的(-1)倍。同样可以推得，Ω 中的項

$$(-1)^{i+1}P_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{r+1}}\underset{i}{\xi^{\alpha}}\underset{1}{\xi^{k_1}}\cdots\underset{j}{\xi^{k_j}_{,\alpha}}\cdots\underset{i}{\hat{\xi}^{k_i}}\cdots\underset{r+1}{\xi^{k_{r+1}}}\quad(j<r)$$

所对应的 Ω' 中的項是它的(-1)倍。　　証毕

由于 $d_x\omega$ 和局部坐标系 (x^i) 之取法无关，所以今后不写成 $d_x\omega$，而写作 $d\omega$，称为 ω 之**外微分**。如 ω 是在开集 U 上定义的 C^∞-外微分形式，則 $d\omega$ 也是在 U 上定义的 C^∞-外微分形式($d\omega$ 的次数比 ω 增加1次)。

例1　$r=0$，ω 是数量場 f. 其外微分是 $\sum f_{,i}dx^i$. 这也就是 f 之微分 df.

例2　如 $r=1$，$\omega=\sum a_idx^i$，則由(7.5)得

$$d\omega=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)dx^j\wedge dx^i;$$

$$d\omega(X,Y)=\frac{1}{2}\{X\cdot\omega(Y)-Y\cdot\omega(X)-\omega([X,Y])\}.$$

例3　$r=2$，$\omega=\sum a_{ij}dx^i\wedge dx^j\quad(a_{ij}=a_{ji})$.

$$d\omega=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j.$$

注意　在三維 Euclid 空間內，从关于直交坐标系(x^i)的支量看来，协变向量与逆变向量可以认为并无区别。这时，例1中的数量場 f 之外微分也就是向量場 grad f. 还有，設例2內 $dx^1\wedge dx^2$，$dx^2\wedge dx^3$，$dx^3\wedge dx^1$ 之系数分别是 b_1，b_2，b_3；則所謂的外微分运算就是由向量場 (a_1, a_2, a_3) 作出它的所謂旋轉的向量場 (b_1, b_2, b_3) 的一种操作。最后在例3里，以 $a_{12}=b_3$，$a_{23}=b_1$，$a_{31}=b_2$，则对应于 ω 有一个向量場(b_1, b_2, b_3)，$d\omega$ 所取的形式就是 $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ 乘以数量場 f. 这里

$$f=\frac{\partial b_1}{\partial x^1}+\frac{\partial b_2}{\partial x^2}+\frac{\partial b_3}{\partial x^3}.$$

这个 f 称为向量場(b_1, b_2, b_3)的散度。

8. 外微分的性质

以下設 ω, θ 是 M 之开集 U 上的 C^∞-外微分形式，α 与 β 为实数。

定理 (1) $d(\alpha\omega+\beta\theta)=\alpha\, d\omega+\beta\, d\theta$（假定 ω, θ 为同次的）。

(2) 在局部坐标系 (x^i) 下，ω 以 $\omega=\sum P_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$ 来表示时，

$$d\omega=\sum dP_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

(3) 如 ω 是 r 次的，θ 是 s 次的，则

$$d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^r\omega\wedge d\theta.$$

(4) 如 $\omega_1, \cdots, \omega_p$ 是 C^∞-Pfaff 形式，则

$$d(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}(\omega_1\wedge\cdots\wedge d\omega_i\wedge\cdots\wedge d\omega_p).$$

(5) $d(d\omega)=0$.

証明 对于每一条都进行和 §7.7 同样的計算，便可証得。这里从略，留給讀者作为练习。

注意 n 維 C^∞-流形 M 之开集 U 和 n 維立方体之內部相同时[1]，下面的性质也成立。

(6) 对于在 U 上定义的 r 次 C^∞-外微分形式 ω，有 U 上的 $r+1$ 次 C^∞-外微分形式 θ 存在，且

$$d\theta=\omega \quad (\text{在 } U \text{ 上})$$

（这样的 ω 叫做正恰的(exact)）之必要充分条件是 $d\omega=0$（在 U 上）。

这桩事实就三維 Euclid 空間而論，如参照 §7.7 末尾例 1~3 所說的，就可知是下面这个向量分析中有名定理的扩充。那就是从 $\operatorname{rot}\mathfrak{A}=0$ 或 $\operatorname{div}\mathfrak{A}=0$，使 $\mathfrak{A}=\operatorname{grad}f$，或 $\mathfrak{A}=\operatorname{rot}\mathfrak{b}$ 的 f 或 $\mathfrak{b}$ 是存在的。

9. C^∞-映射的作用

設 M_1, M_2 各为 m, n 維的 C^∞-流形，F 是由 M_1 投向 M_2 中

---

[1] 或者在更弱的假定下，U 是单連通的（U 内任意的連續閉曲綫在 U 内可以連續地收縮成一点），如形式是 Pfaff 形式，結論也成立。

的 C^∞-映射。对于 M_1 之各点 p，有 §4.2 里所說的映射 $(\delta F)_p$。如 ω 是 M_2 上的 r 次 C^∞-外微分形式，M_1 上的 r 次外微分形式 θ 由

$$\theta_p = (\delta F)_p \omega_q \quad (q = F(p))$$

定义，写成 $\theta = \delta F(\omega)$. 明显地，$\theta$ 的支量也是 C^∞ 的 (§4.2)，因此，θ 是 M_1 上的 C^∞-外微分形式。容易知道

$$\delta F(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1\delta F(\omega_1) + \alpha_2\delta F(\omega_2)$$

$(\alpha_1, \alpha_2$ 是实数，ω_1, ω_2 是同次的)，

$$\delta F(\omega_1 \wedge \omega_2) = \delta F(\omega_1) \wedge \delta F(\omega_2).$$

定理　$d\{\delta F(\omega)\} = \delta F(d\omega)$　(d, δF 之可换性)。

証明　在点 p 与 $q = F(p)$ 之周围分别取局部坐标系 (x^i) 与 (y^j)，記

$$\omega = \sum P_{i_1\cdots i_r} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r},$$

$$y^j \circ F = F^j(x^1, \cdots, x^m) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

$$P_{i_1\cdots i_r} \circ F = Q_{i_1\cdots i_r}.$$

由于 dy^i 关于 (y^j) 的支量是 $(\delta^i_1, \cdots, \delta^i_n)$，如果 $\delta F(dy^i)$ 关于 (x^i) 的支量是 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，则从 §4.2 知道，

$$\alpha_k = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x^k} F^i(x^1, \cdots, x^m)\right).$$

因此

$$\delta F(dy^i) = \sum \alpha_k dx^k = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k = dF^i (= d(y^i \circ F)$$
$$= d(\delta F(y^i))).$$

从而有

$$d(\delta F(\omega)) = d(\sum Q_{i_1\cdots i_r} dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_r})$$
$$= \sum dQ_{i_1\cdots i_r} \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_r}.$$

(§7.8，定理(3)，(4)，(5))

另一方面，

$$\delta F(d\omega)=\delta F(\sum dP_{i_1\cdots i_r}\wedge dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_r})$$
$$=\sum \delta F(dP_{i_1\cdots i_r})\wedge dF^{i_1}\wedge\cdots\wedge dF^{i_r}.$$

因

$$\delta F(dP_{i_1\cdots i_r})=\delta F(\sum \partial P_{i_1\cdots i_r}/\partial y^\alpha dy^\alpha)$$
$$=\sum\{(\partial P_{i_1\cdots i_r}/\partial y^\alpha)\circ F\}\cdot dF^\alpha=\sum\{(\partial P_{i_1\cdots i_r}/\partial y^\alpha)\circ F\}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta$$
$$=\sum \partial Q_{i_1\cdots i_r}/\partial x^\beta dx^\beta=dQ_{i_1\cdots i_r}=d(\delta F(P_{i_1\cdots i_r})).$$

所以 $d(\delta F(\omega))$ 和 $\delta F(d\omega)$ 相等。　証毕

注意　从簡单的計算，得

$$\delta F(\sum P_{i_1\cdots i_r}dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_r})=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r\\ j_1,\cdots,j_r}}(P_{i_1\cdots i_r}\circ F)\frac{\partial(y^{i_1},\cdots,y^{i_r})}{\partial(x^{j_1},\cdots,x^{j_r})}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}.$$

§8 流形上的全微分方程(分布)

1. 全微分方程(分布)的概念

設 M 是 n 維的 C^∞-流形，r 是一个自然数。对于 M 的各点 p，有 M 在 p 的切向量空間 T_p 的一个 r 維子空間 $\mathfrak{M}_p$ 和它对应。构成这种对应关系的映射 $\mathfrak{M}$ 称为 ***M* 上的 *r* 維分布或 *M* 上的 *r* 維全微分方程。**

对于 M 之各点 p，有 M 在 p 的协变切向量空間 T_p^* 之 r 維子空間 $\mathfrak{N}_p^*$ 和它对应，构成这种对应关系的映射 $\mathfrak{N}^*$，称为 ***M* 上的 *r* 維对偶分布。**

設 $\mathfrak{M}:p\to\mathfrak{M}_p$ 是 r 維分布，就决定了如下的 $n-r$ 維的对偶分布 $\mathfrak{M}^*$，即 $\mathfrak{M}^*$ 是 $p\to\mathfrak{M}_p^*=\mathfrak{M}_p$ 在 T_p^* 里的零化子空間 (annihilator subspace)❶。这个 $\mathfrak{M}^*$ 称为对应于 $\mathfrak{M}$ 的对偶分布。同样，設 $\mathfrak{M}^*$ 是已給定的 r 維对偶分布，就决定了 $n-r$ 維的分布 $\mathfrak{M}$，即 $\mathfrak{M}$ 是

❶ 即 $\mathfrak{M}_p^*=\{\omega\in T_p^*;\ \omega(X)=0$ (对于每一个 $X\in\mathfrak{M}_p$)$\}$.

$p \to \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_p^*$ 在 T_p 里的零化子空間。这个 $\mathfrak{M}$ 称为对应于 $\mathfrak{M}^*$ 的分布。从这个 $\mathfrak{M}$ 再作对应于它的对偶分布。明显地，所作的就是 $\mathfrak{M}^*$. 因此，r 維的分布 $\mathfrak{M}$ 和 $n-r$ 維的对偶分布 $\mathfrak{M}^*$ 間，由于以上的对应关系是一一对应的。所以对于 $\mathfrak{M}^*$ 的研究可以代替对 $\mathfrak{M}$ 的研究。关于 $\mathfrak{M}$ 的性质也完全可以"翻譯"成为 $\mathfrak{M}^*$ 的性质。

例 在 R^3 里的全微分方程是

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0.$$

如果 $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$，则在 R^3 上定义了一个二維的分布。那就是，把 (x, y, z) 看成 R^3 上的局部坐标系，对于点 $p = (x_0, y_0, z_0)$，使

$$\omega_p = P(x_0, y_0, z_0)dx + Q(x_0, y_0, z_0)dy + R(x_0, y_0, z_0)dz \in T_p^*$$

和它对应，因 $\omega_p \neq 0$，所以 ω_p 之全体組成了 T_p^* 的一維子空間 $\{\omega_p\} = \mathfrak{M}_p^*$. 对偶分布 $\mathfrak{M}^*$: $p \to \{\omega_p\}$ 是一維的，和它对应的分布 $\mathfrak{M}$ 是二維的。

2. 分布的 C^∞-性

設 $\mathfrak{M}$: $p \to \mathfrak{M}_p$ 是 M 上的 r 維分布。所謂 $\mathfrak{M}$ 是 C^∞ 的，指的是对于 M 上的各点 p，包含 p 的开集 V 以及 V 上定义的 r 个 C^∞-向量場 $X_1, \cdots, X_r$ 是存在的，而且具有下述性质 (1)：

(1) 在 V 的各点 q 上，$(X_1)_q, \cdots, (X_r)_q$ 組成 $\mathfrak{M}_q$ 的基底。($X_1, \cdots, X_r$ 叫做 $\mathfrak{M}$ 在点 p 周圍的基底。)

設 $\mathfrak{N}^*$: $p \to \mathfrak{N}_p^*$ 是 M 上的 s 維对偶分布。所謂 $\mathfrak{N}^*$ 是 C^∞ 的，指的是对于 M 上的各点 p，包含 p 的开集 V 以及 V 上定义的 s 个 C^∞-Pfaff 形式 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 是存在的，而且具有下述性质(2)：

(2) 在 V 的各点 q 上，$(\omega_1)_q, \cdots, (\omega_s)_q$ 組成 $\mathfrak{N}_q^*$ 的基底。($\omega_1, \cdots, \omega_s$ 叫做 $\mathfrak{N}^*$ 在点 p 周圍的基底。)

容易知道，对于 r 維分布 $\mathfrak{M}$ 和对应于它的 $n-r$ 維对偶分布 $\mathfrak{M}^*$，要 $\mathfrak{M}$ 具有 C^∞-性的必要与充分条件是 $\mathfrak{M}^*$ 具有 C^∞-性 (参考 §8.4 定理 2 的証明)。

例 在 §8.1 的例中，如果 P, Q, R 是 C^∞-函数，则 $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ 是 C^∞-分布。

以后只考虑 C^∞-分布。若 $\mathfrak{M}$ 是 r 維的 C^∞-分布,对应于 $\mathfrak{M}$ 的 $n-r$ 維对偶分布 $\mathfrak{M}^*$ 在点 p 周圍的基底假設是 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$(定义域是 V). 那末,

$$\omega_1=0, \cdots, \omega_{n-r}=0$$

称为 V 上对应于 $\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}^*$)的**全微分方程**。

定理 設 $\mathfrak{M}$ 是 r 維的 C^∞-分布, L 是在 M 之开集 U 上定义的 C^∞-向量場,对于 U 上的各点 q, $L_q\in\mathfrak{M}_q$. (这时称 L 在 U 上屬于 $\mathfrak{M}$.)更設 $\mathfrak{M}$ 在点 q 周圍的基底是 $X_1, \cdots, X_r$, 則由

$$L_q=\sum_{i=1}^r\varphi_i(q)(X_i)_q$$

所决定的 $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ 是在 p 之邻域內定义的 C^∞-函数。(同样的事实对 C^∞-对偶分布也成立。)

証明 設关于 p 周圍的局部坐标系, X_i 的支量是 $(g_{i1}, \cdots, g_{in})$, L 的支量是 $(f_1, \cdots, f_n)$, 則

$$\sum_{i=1}^r\varphi_i g_{ij}=f_j \quad (j=1, \cdots, n).$$

因矩陣 (g_{ij}) 之某一 r 阶小行列式在 p 的邻域上不等于 0, 所以利用 Cramer 方法可以对上式求解, 因而 $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ 是 C^∞-函数。 証毕

3. 积分流形

設 $\mathfrak{M}$ 是 M 上的 r 維 C^∞-分布, $\mathfrak{M}^*$ 是对应于 $\mathfrak{M}$ 的对偶分布。所謂 M 的子流形 N 是 $\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}^*$)**之广义的积分流形**,指的是

$$\text{在 } N \text{ 的各点 } p \text{ 上}, \ T_p(N)\subset\mathfrak{M}_p \tag{8.1}$$

成立。这时, 若 N 的維数是 s, 則因 $T_p(N)$ 也是 s 維的, 所以由 (8.1)得

$$s\leqslant r.$$

当 $s=r$ 时, 子流形 N 称为 $\mathfrak{M}$ 的**狭义积分流形**。这个规定和下面的条件

$$\text{在 } N \text{ 的各点 } p \text{ 上，} T_p(N) = \mathfrak{M}_p \tag{8.2}$$

是等价的。

将 (8.1) 对于 $\mathfrak{M}^*$ 改换写法。設 M 有子流形 N，由 N 投于 M 中的恒等映射記以 ι. 在 N 上一点 p 的周圍，$\mathfrak{M}^*$ 之基底設为 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$，则 $L \in T_p(N)$ 属于 $\mathfrak{M}_p$ 的必要与充分条件是

$$\omega_i(L) = 0 \quad (i=1, \cdots, n-r).$$

但因 $L \in T_p(N)$ 滿足 $L = (d\iota)_p L$，所以

$$\{(\delta\iota)_p \omega_i\}(L) = \omega_i((d\iota)_p L) = \omega_i(L).$$

因此，$T_p(N) \subset \mathfrak{M}_p$ 之必要与充分条件是在 $T_p(N)$ 上 $(\delta\iota)_p \omega_i = 0$. 这就是說 (8.1) 等价于

$$\text{在 } N \text{ 上，} \delta\iota(\omega_i) = 0 \quad (i=1, \cdots, n-r). \tag{8.3}$$

以下对于条件 (8.1) 或 (8.3) 进行解析的叙述。在子流形 N 上一点 p 的周圍，取 N 与 M 之局部坐标系 $(z^1, \cdots, z^s)$ 与 $(x^1, \cdots, x^n)$. 在 p 周圍 $\mathfrak{M}$ 之基底設为 $L_1, \cdots, L_r$，以

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (i=1, \cdots, r).$$

处在 N 内而又包含 p 的充分小的开集 N_0，正如 § 6.2 的注意項下所提到的一样，是 M 的正則子流形。N_0 在 p 周圍的局部方程假設是 (§6.4)

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_{n-s} = 0,$$

则 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-s}$ 是在含有 p 的 M 之某一开集 U 上定义的 C^∞-函数，而且在 U 上，它們彼此无关，就是說，在 U 的各点上，

$$\text{矩陣 } (\partial\varphi_i/\partial x^j)_{1 \le i \le n-s, 1 \le j \le n} \text{ 之秩数} = n-s. \tag{8.4}$$

再者，$L (\in T_p(M))$ 属于 $T_p(N)$ 的必要与充分条件是 $(d\varphi_i)_p(L) = 0$ $(i=1, \cdots, n-s)$ (§ 6.5)，由于 $(d\varphi_i)_p(L) = (L\varphi_i)_p$ (§ 4.3)，所以

$$(L\varphi_i)_p = 0 \quad (i=1, \cdots, n-s)$$

是 $L\in T_p(N)$ 的条件。特别当 N 是狭义积分流形时，由于 $s=r$，$T_p(N)=\mathfrak{M}_p$，所以

$$L_j\varphi_i]_p=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}\Big]_p=0\quad(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant i\leqslant n-r).\quad(8.5)$$

反之，設满足(8.4)的 $n-r$ 个 C^∞-函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-r}$ 在 p 之邻域 U 上是存在的，而且在 U 上

$$L_j\varphi_i=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}=0\quad(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant i\leqslant n-r)\qquad(8.6)$$

成立，那末由局部方程 $\varphi_i=\text{const}\,(1\leqslant i\leqslant n-r)$ 在 U 上定义的正則子流形，就是 $\mathfrak{M}$ 的 r 維积分流形。这种形式的积分流形在 U 的所有点上是存在的。事实上，对于 $q\in U$，以 $\alpha_i=\varphi_i(q)$ $(1\leqslant i\leqslant n-r)$，則由

$$\varphi_i=\alpha_i\quad(i=1, \cdots, n-r)$$

定义的积分流形通过 q. 根据以上所說，綫性联立偏微分方程組称为**对应于分布 $\mathfrak{M}$ 的偏微分方程**(在局部坐标系 (x^i) 下)。

其次，置

$$x^i\circ\iota=f^i(z^1, \cdots, z^s)\quad(i=1, \cdots, n),$$

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x)dx^j\quad(i=1, \cdots, n-r),$$

則

$$\delta\iota(\omega_i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}b_{ij}(f^1, \cdots, f^n)\frac{\partial f^j}{\partial z^k}dz^k.$$

因此，(8.3)和

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}b_{ij}(f^1, \cdots, f^n)\frac{\partial f^j}{\partial z^k}dz^k=0\quad(i=1, \cdots, n-r)\quad(8.7)$$

等价。由于上式可以改写成

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(f^1, \cdots, f^n)\frac{\partial f^j}{\partial z^k}=0\quad\begin{pmatrix}i=1, \cdots, n-r\\ k=1, \cdots, s\end{pmatrix},\quad(8.8)$$

因此要找出积分流形，就相当于在点 p 的邻域上找出 s 个变数之

C^∞-函数 $f^i(x^1, \cdots, x^s)$❶。矩陣 $(\partial f^i/\partial x^j)$ 之秩数在每一点上应該是 s，而且要满足(8.8)。这样的 $f^1, \cdots, f^n$ 叫做全微分方程

$$\sum b_{ij}(x)dx^j = 0 \quad (i=1, \cdots, n-r) \tag{8.9}$$

之 s 維的解。

偏微分方程 (8.6) 和全微分方程 (8.9) 对应于同一的分布 $\mathfrak{M}$ 时，就称它們之間的一个是另一个的**伴隨方程**。要由一方作出另一方，只要照下面那样进行就可以。比方說，要扩大(b_{ij})使它在点 p 周圍是 n 秩的正則矩陣（卽行列式不等于 0 的矩陣），并作出它的逆矩陣 (c_{ij})，則只要以 $c_{i,n-r+1}=a_{1i}$, $c_{i,n-r+2}=a_{2i}$, $\cdots$, $c_{i,n}=a_{ri}$ $(i=1, \cdots, n)$就可以了。

4. 分布之完全可积(分)性和对合的分布

我們称 M 上 r 維的 C^∞-分布 $\mathfrak{M}$ 是**完全可积(分)的**，意思是指对于 M 的各点 p，通过它的 (r 維) 积分流形是存在的。所謂 $\mathfrak{M}$ 是**对合的** (involutive)，指的是对于 M 之任意开集 U 以及在 U 上定义的任意 C^∞-向量場 L_1, L_2，如果 L_1 与 L_2 在 U 上是属于 $\mathfrak{M}$ 的，則 $[X_1, X_2]$ 在 U 上也是属于 $\mathfrak{M}$ 的❶。就是說要使 $\mathfrak{M}$ 是对合的，其必要与充分条件是在 M 上各点 p 的周圍，$\mathfrak{M}$ 的基底是 $X_1, \cdots, X_r$ (定义域 V)，而各 $[X_i, X_j]$在 V 上都属于 $\mathfrak{M}$。实际上，必要性是很明显的，因此只要証明充分性就够了。如 L_1, L_2 在 p 之邻域上属于 $\mathfrak{M}$，則 L_1 与 L_2 可以表示为 $L_1=\sum \varphi_i X_i$, $L_2=\sum \psi_i X_i$。由 §8.2之定理知道，φ_i 与 ψ_i 是 C^∞-函数。再从簡单計算，得到

$$[L_1, L_2]=\sum_{i,j}\{\varphi_i(X_i\psi_j)X_j-\psi_j(X_j\varphi_i)X_i+\varphi_i\psi_j[X_i, X_j]\}.$$

因此，$[L_1, L_2]$属于 $\mathfrak{M}$。

---

❶ 換言之，由 R^s 的开集 Δ 投向含有 p 而又属于 M 的一个开集中的 C^∞-映射可以作出。

❶ 这样的 $\mathfrak{M}$ 有时称为完全系。

定理 1 r 維的 C^∞-分布成为对合分布的必要与充分条件，是对应于 $\mathfrak{M}$ 的 $n-r$ 維分布 $\mathfrak{M}^*$，具有如下的性质(1)：

(1) 对于 M 上的任意一点 p，$\mathfrak{M}^*$ 在 p 周圍的基底 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$ 和 $\mathfrak{M}$ 之基底 $L_1, \cdots, L_r$ (定义域 V)，有

$$d\omega_i(L_j, L_k)=0 \quad (i=1, \cdots, n-r; j, k=1, \cdots, r).$$

注意 (1) 的陈述也可采取如下的形式：由 $\omega_1=\cdots=\omega_{n-r}=0$，导出 $d\omega_1=\cdots=d\omega_{n-r}=0$。(例如 E. Cartan 的許多論文中就是这样申述的。)

証明 由公式

$$d\omega_i(L_j, L_k)=\frac{1}{2}\{L_j\cdot\omega_i(L_k)-L_k\cdot\omega_i(L_j)-\omega_i([L_j, L_k])\}$$

(見§7.7)，定理卽可推得。 証毕

定理 2 (所用記号与上面同)要使 $\mathfrak{M}$ 是对合的，則在 M 之各点 p 上，如下各点分别是其必要与充分的条件。

(2) 在 p 的邻域上，C^∞-Pfaff 形式 $\Omega_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant n-r)$ 存在，而且 $d\omega_i=\sum_{j=1}^{n-r}\omega_j\wedge\Omega_{ij} \quad (i=1, \cdots, n-r)$.

(3) $d\omega_i\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{n-r}=0 \quad (i=1, \cdots, n-r)$.

証明 在点 p 的周圍作 C^∞-Pfaff 形式 $\theta_1, \cdots, \theta_r$，使得在 p 的周圍，$\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$ 和 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 是綫性无关的。这些 ω，在 p 周圍的局部坐标系 (x^i) 之下，表示成

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)dx^j \quad (i=1, \cdots, n-r).$$

由于矩陣 (a_{ij}) 之秩数在点 p 处等于 $n-r$，所以把 (x^i) 适当地排出时，可使

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-r} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-r,1} & \cdots & a_{n-r,n-r} \end{vmatrix}_p \neq 0.$$

因此，n 次矩陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-r} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{n-r,1} & \cdots & a_{n-r,n-r} & \cdots & a_{n-r,n} \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 \quad 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{（右下部分是单位矩陣）}$$

在点 p 之邻域上的行列式不等于 0。从而逆矩陣 $A^{-1}=(b_{ij})$ 在 p 之邻域上是存在的。如果把 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 取作

$$\theta_i = dx^{n-r+i} \quad (i=1, \cdots, r),$$

則在 p 周圍的各点 q 上，$\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}, \theta_1, \cdots, \theta_r$ 組成 T_q^* 的基底。今以

$$L_j = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n-r+j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (j=1, \cdots, r),$$

由于 $L_1, \cdots, L_r$ 在 p 之周圍是綫性无关的 C^∞-向量場，而且 $\omega_i(L_j)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k,n-r+j}=0$，所以 $L_1, \cdots, L_r$ 在 p 周圍构成 $\mathfrak{M}$ 之基底。但

$$\theta_i(L_j) = b_{n-r+i,\, n-r+j} = \delta_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant r),$$

这里的 δ_{ij} 是 Kronecker 符号。在点 p 之周圍，有

$$(4) \qquad d\omega_i = \sum F_i^{jk}\omega_j \wedge \omega_k + \sum G_i^{jk}\omega_j \wedge \theta_k + \sum H_i^{jk}\theta_j \wedge \theta_k$$

（$F_i^{jk}, G_i^{jk}, H_i^{jk}$ 是 C^∞-函数）。从而有

$$\begin{aligned} d\omega_i(L_j, L_k) &= (H_i^{jk}\theta_j \wedge \theta_k + H_i^{kj}\theta_k \wedge \theta_j)(L_j, L_k) \\ &= H_i^{jk}\{\theta_j(L_j)\theta_k(L_k) - \theta_j(L_k)\theta_k(L_j)\} = H_i^{jk}, \end{aligned}$$

由定理 1 就知道，要使 $\mathfrak{M}$ 是对合的分布，其必要与充分的条件是

$$H_i^{jk}=0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-r,\ 1 \leqslant j, k \leqslant r).$$

这就意味着条件 (2)。

其次，从 $\omega_j \wedge \omega_i = 0$，可以由 (2) 得出 (3)，这是明显的。反之，

如果(3)成立，则当 $d\omega_i$ 以形式(4)表示时，显然有 $H_i^{jk}=0$。 証毕.

例 1 1維的 C^∞–分布必定是对合的。

例 2 R^n 内的 $n-1$ 維 C^∞–分布

$$\omega=\sum_{i=1}^n f_i(x)\,dx^i=0$$

成为对合的条件是 $d\omega\wedge\omega=0$，即

$$\left(\sum_i df_i\wedge dx^i\right)\wedge\left(\sum_j f_j dx^j\right)=0.$$

这式經計算后，得

$$\sum_{k,i,j} f_j\frac{\partial f_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j=0.$$

比較这式两边关于 $dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j$ $(1\leqslant k<i<j\leqslant n)$ 的系数，即得

$$f_j\frac{\partial f_i}{\partial x^k}+f_k\frac{\partial f_j}{\partial x^i}+f_i\frac{\partial f_k}{\partial x^j}-f_j\frac{\partial f_k}{\partial x^i}-f_k\frac{\partial f_i}{\partial x^j}-f_i\frac{\partial f_j}{\partial x^k}=0.$$

这样的 $\binom{n}{3}$ 个方程所成的联立方程組就是使它成为对合的必要与充分条件。

例 3 在 R^{m+n} 上，坐标系写成 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^m)$，并有 C^∞–Pfaff 形式

$$\omega^i=dy^i-\sum_{j=1}^n\varphi_j^i(x,y)\,dx^j\quad(i=1,\cdots,m).$$

从而得出 n 維分布

$$\mathfrak{M}:\qquad \omega^i=0\quad(i=1,\cdots,m).$$

$\omega^1,\cdots,\omega^m$ 在各点之周圍构成 $\mathfrak{M}$ 的基底，于是有

$$d\omega^i=-\sum_{j=1}^n d\varphi_j^i\wedge dx^j,$$

$$d\varphi_j^i=\sum_{l=1}^m\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial y^l}\,dy^l+\sum_{p=1}^n\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial x^p}dx^p=\sum_l\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial y^l}\left(\omega^l+\sum_k\varphi_k^l dx^k\right)+\sum_p\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial x^p}dx^p.$$

由于 $dx^1,\cdots,dx^n,\omega^1,\cdots,\omega^m$ 是綫性相关的，所以 $d\omega_i$ 要满足定理 2 之(2)的必要与充分条件是

$$\sum_{l,k,j}\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial y^l}\varphi_k^l dx^k\wedge dx^j+\sum_{p,j}\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial x^p}dx^p\wedge dx^j=0.$$

比較这式两边关于 $dx^k\wedge dx^j$ 的系数，就得到

$$\sum_l\left(\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial y^l}\varphi_k^l-\frac{\partial\varphi_k^i}{\partial y^l}\varphi_j^l\right)+\left(\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial x^k}-\frac{\partial\varphi_k^i}{\partial x^j}\right)=0.$$

由这样的 $m\cdot\binom{n}{2}$ 个方程所成的联立方程組就是 $\mathfrak{M}$ 成为对合的必要与充分

的条件。

5. 分布的对合性与完全可积性的关系

定理1 若 C^∞-流形 M 上的 r 維 C^∞-分布 $\mathfrak{M}$ 是完全可积(分)的，則 $\mathfrak{M}$ 是对合的。

証明 把对应于 $\mathfrak{M}$ 的对偶分布記以 $\mathfrak{M}^*$，在 $\mathfrak{M}$ 上任意一点 p 的周圍，取 $\mathfrak{M}^*$ 之基底 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$。这时通过 p 的 r 維积分流形 N 是存在的。从 N 投到 M 中的恒等映射記以 ι。由于 $(\delta\iota)\omega_i=0$，以及 $\delta\iota$ 和 d 的可换性(§7.9)，所以有 $(\delta\iota)d\omega_i=0$。这意味着对属于 $T_p(N)$ 的任意 L_1 与 L_2，有 $d\omega_i(L_1, L_2)=0$。因为 $T_p(N)=\mathfrak{M}_p$，于是可以利用 §8.4 之定理1，从而知道 $\mathfrak{M}$ 是对合的。　　証毕

本定理之逆定理也成立。

定理2 (Erobensus 定理)　C^∞-流形 M 上的对合 C^∞-分布 $\mathfrak{M}$ 是完全可积(分)的。

証明 設 M 与 $\mathfrak{M}$ 的維数分别为 n 与 r，p 是 M 上的任意一点。如能証明通过 p 有 r 維的积分流形存在就行了。取 p 周圍的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$❶，設 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{M}$ 在 p 周圍的基底。这样，只要能找出在 p 之邻域上定义的 C^∞-函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-r}$，并使它满足

(1) $X_i\varphi_j=0$ $(1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant n-r)$ (在 p 之邻域上)，

(2) 矩陣 $\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x^i}\right)_p$ 之秩数 $=n-r$ (即 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-r}$ 在 p 之周圍是彼此无关的)就够了❷(§8.3)。首先討論 $r=1$ 的情况。

把 X_1 写成 X，并且表示为

$$X=\sum_i F^i(x)\partial/\partial x^i.$$

---

❶ 为了简单起見，假定取 (x^i) 使 $x^i(p)=0$ $(i=1, \cdots, n)$。

❷ 在点 p 附近定义的 C^∞-函数 φ，如果在 p 的周圍满足 $X_1\varphi=\cdots=X_r\varphi=0$，則称 φ 为分布 $\mathfrak{M}$ 的第一积分。第一积分是过 p 之积分流形上的定数(在 p 之周緣)。

当 (x^i) 的顺序适当地安排时，可以設 $F^1(p)=F^1(0)\neq 0$，再設 $\xi^2, \cdots, \xi^n$ 是絕对值充分小的 $n-1$ 个实数。試在这样的假設下考虑下述的微分方程組

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt}=F^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i=1, \cdots, n) \\ \qquad \left(\text{或写成 } \dfrac{dx^1}{F^1}=\dfrac{dx^2}{F^2}=\cdots=\dfrac{dx^n}{F^n}=dt\right), \\ \text{初始条件}\begin{cases} x^1(0)=0, \\ x^i(0)=\xi^i \quad (i=2, \cdots, n). \end{cases} \end{cases}$$

这方程組的解假設是❶

$$x^i=\varphi^i(t, \xi^2, \cdots, \xi^n) \quad (i=1, \cdots, n).$$

φ^i 是在 $(0, \cdots, 0)$ 的邻域上定义的函数，关于 $t, \xi^2, \cdots, \xi^n$ 是具有 C^∞-性的❶。把 t 写成 ξ^1，則 $\varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 是在 0 附近定义的 C^∞-函数，而且满足

$$\left.\frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^n)}{\partial(\xi^1, \cdots, \xi^n)}\right]_{\xi=0}=\begin{vmatrix} F^1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ F^n(0) & 0 & & 1 \end{vmatrix}=F^1(0)\neq 0.$$

在原点附近解

$$\eta^i=\varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n) \quad (i=1, \cdots, n)$$

所得到的逆 C^∞-函微設为

$$\xi^i=\psi^i(\eta^1, \cdots, \eta^n) \quad (i=1, \cdots, n).$$

設以

$$y^i=\psi^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i=1, \cdots, n),$$

則 $(y^1, \cdots, y^n)$ 也是点 p 周圍的局部坐标系，而且

$$x^i=\varphi^i(y^1, \cdots, y^n) \quad (i=1, \cdots, n)$$

---

❶ 关于解之存在及其性质(例如說，初始条件内含有参数的情况)，可以参看微分方程論。

成立。(明显地，$y^i(p)=0$，$(i=1, \cdots, n.)$) 从此，得

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^1}=F^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i=1, \cdots, n).$$

于是对于在 p 周圍定义的任意 C^∞-函数 f，有

$$Xf=\sum_i F^i \frac{\partial f}{\partial x^i}=\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial y^1}$$

成立。特别当 $f=y^k(k=2, \cdots, n)$ 时，$Xy^k=0$. 因此，$y^2, \cdots, y^n$ 就是所求的解。

其次討論 $r>1$ 的一般情况。利用归納法，設直到 $r-1$，都有满足(1)与(2)之解存在。由 $r=1$ 时的証明，如对于 X_1，在点 p 的周圍取局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^n)$，則

$$X_1=\partial/\partial y^1, \quad X_1y^k=0 \quad (k=2, \cdots, n).$$

若 $X_1, \cdots, X_r$ 用局部坐标系 (y^i) 表示，則有

$$X_i=\sum_{j=1}^n F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(因而，$F_1^1=1$, $F_1^2=\cdots=F_1^n=0.$)

今以 $Y_1=X_1$, $Y_i=X_i-F_i^1X_1(i=2, \cdots, r)$，显明地，$Y_1, \cdots, Y_r$ 在点 p 周圍构成 $\mathfrak{M}$ 之基底。因此，矩陣

$$\begin{pmatrix} F_2^2 & F_2^3 & \cdots & F_2^n \\ F_3^2 & F_3^3 & \cdots & F_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_r^2 & F_r^1 & \cdots & F_r^n \end{pmatrix}_p$$

之秩数是 $r-1$. 对 $y^2, \cdots, y^n$ 加以适当的調換，可以使 $\det(F_i^j)_{2<i,j<r}$ 在点 p 上不等于 0. 因此，矩陣 $(F_i^j)_{2<i,j<r}$ 在点 p 附近有逆矩陣 $(G_i^j)_{2<i,j<r}$. 这时以

$$Z_1=Y_1=X_1,$$

$$Z_i=\sum_{j=2}^r G_i^jY_j \quad (i=2, \cdots, r),$$

則 $Z_1, \cdots, Z_r$ 在点 p 周圍是 $\mathfrak{M}$ 之基底。如用局部坐标系 (y^i) 来表

示，可写成

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{\partial}{\partial y^1} \\ Z_2 = \dfrac{\partial}{\partial y^2} + \sum\limits_{j=r+1}^{n} H_2^j \dfrac{\partial}{\partial y^j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_r = \dfrac{\partial}{\partial y^r} + \sum\limits_{j=r+1}^{n} H_r^j \dfrac{\partial}{\partial y^j}. \end{cases}$$

这里的 H_i^j, $2\leqslant i\leqslant r$, $r+1\leqslant j\leqslant n$ 是 $y^1, \cdots, y^n$ 的 C^∞-函数。从这种形式容易知道，

$$[Z_1, Z_i] = \frac{\partial H_i^{r+1}}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial y^{r+1}} + \frac{\partial H_i^{r+2}}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial y^{r+2}} + \cdots + \frac{\partial H_i^n}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial y^n}.$$

但由于 $\mathfrak{M}$ 是对合的，所以这些 $[Z_1, Z_i]$ 是 $Z_1, \cdots, Z_r$ 的綫性結合式(以 C^∞-函数作为結合式的系数)。因此，

$$\frac{\partial H_i^j}{\partial y^1} = 0 \quad (2\leqslant i\leqslant r, r+1\leqslant j\leqslant n),$$

亦即，H_i^j 不包含 y^1.(从而得 $[Z_1, Z_i]=0$, 同样計算可得 $[Z_i, Z_j]=0$ $(1\leqslant i, j\leqslant r)$.)因此，以 $(y^2, \cdots, y^n)$ 作为坐标的 R^{n-1} 上，在其原点附近，由偏微分方程

$$Z_2 f=0, \cdots, Z_r f=0$$

所定义的 $r-1$ 維分布是存在的。由于 $[Z_i, Z_j]=0$, 所以这个分布是对合的。根据归納法的假定，在原点周圍有独立的 $(n-1)-(r-1)=n-r$ 个解 $f_i(y^2, \cdots, y^n)$ $(i=1, \cdots, n-r)$. 这时，矩陣 $(\partial f_i/\partial y^j)_0$, $1\leqslant i\leqslant n-r$, $2\leqslant j\leqslant n$ 之秩数是 $n-r$, 就是把 f_i 看成是 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 的函数。$f_1, \cdots, f_{n-r}$ 在原点的周圍是独立的，并且构成 $Z_1 f=0$ 的解。因此，在点 p 周圍定义的 C^∞-函数 $f_1, \cdots, f_{n-r}$ 滿足

$$X_1 f=0, \cdots, X_r f=0,$$

而且是独立的。这样就完成了归納法。 証毕

注意 由(2),我們可以把 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-r}$ 扩充成为在 p 周圍的局部坐标系 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

6. 由对合分布 $\mathfrak{M}$ 定义的新流形构造

在 n 維的 C^∞-流形 M 上,有 r 維的对合 C^∞-分布 $\mathfrak{M}$, 照以下所說的那样, $\mathfrak{M}$ 在 M 上可以定义一个新的 r 維 C^∞-流形构造。首先让我們說明在 M 上由 $\mathfrak{M}$ 定义的新拓扑(称为 $\mathfrak{M}$-拓扑)。我們称 M 之子集 U 是 $\mathfrak{M}$-开集,这意味着 U 或者是空集,或者对于 U 的各点 p, 存在着分布 $\mathfrak{M}$ 的 r 維积分流形 N, 有关系 $p\in N\subset U$. (換言之,当 U 或者是空集,或者表示为 $\mathfrak{M}$ 的 r 維积分流形族 $\{N_\lambda\}$ 之和集: $U=\bigcup N_\lambda$ 时,就称 U 是 $\mathfrak{M}$-开集。)根据这一規定,显然有(由于 $\mathfrak{M}$ 是完全可积(分)的)

(1) M 及空集是 $\mathfrak{M}$-开集。

由 § 8.5 定理 2 的証明知道,

(2) M 之开集是 $\mathfrak{M}$-开集。

更由定义,明显地有

(3) 由 $\mathfrak{M}$-开集之族 $\{U_\lambda\}$ 所成的和集 $\bigcup U_\lambda$ 仍是 $\mathfrak{M}$-开集。

从上面的(2)可以把 Hausdorff 的分离公理叙述如下:

(4) 对于 M 上的两点 p 与 q $(p\neq q)$, 有 $\mathfrak{M}$-开集 U_1 与 U_2 存在,使 $p\in U_1$; $q\in U_2$, $U_1\cap U_2=$ 空集。

利用 $\mathfrak{M}$-开集的概念,要說明 M 是拓扑空間,只要說明下面的事实就行了。

(5) 如果 U_1, U_2 是 $\mathfrak{M}$-开集,則 $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathfrak{M}$-开集。

証明 如果 $U_1\cap U_2$ 是空集,定理是显明的。今設 $p\in U_1\cap U_2$, 取 $\mathfrak{M}$ 之 r 維积分流形 N_1 和 N_2, 使 $p\in N_1\subset U_1$, $p\in N_2\subset U_2$. 在点 p 周圍以 V 作为坐标邻域的局部坐标系取作 (x^i), 則使 $x^1(p)=\cdots=x^n(p)=0$, 而且 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^r$ 一定可以在 p 的周圍构成 $\mathfrak{M}$ 之基底(§ 8.5 之最后的注意)。必要时,可以設 N_1 是 M

之連通的正則子流形，而且 $N_1 \subset V$。这只要把含有 p 的 N_1 之开子流形取得充分小，并以它代替 N_1 即可。对于 N_2 也可以作同样的假定。

設 ι_i 是从 N_i 投于 M 中的恒等映射 $(i=1, 2)$，$x^1\circ\iota_i, \cdots, x^r\circ\iota_i$ 在点 p 周圍构成 N_i 的局部坐标系，$x^{r+1}\circ\iota_i, \cdots, x^n\circ\iota_i$ 在 N_i 上等于 0。实际上，$\mathfrak{M}$ 可以全微分方程 $dx^{r+1}=0, \cdots, dx^n=0$ 表示。因 N_i 是它的积分流形，所以 $x^j\circ\iota_i\ (j>r)$ 在 N_i 各点的周圍是定数。又由于 N_i 是連通的，所以它在 N_i 上也是定数。另一方面，$x^1\circ\iota_i, \cdots, x^n\circ\iota_i$ 中有适当的 r 个(在点 p 之周圍)表示 N_i 的局部坐标系 (§4.4 之定理 1 的(1))，由以上的說法，这非是 $x^1\circ\iota_i, \cdots, x^r\circ\iota_i$ 不可。因此，如以

$$N_3=\{q\in V;\ x^{r+1}(q)=\cdots=x^n(q)=0\},$$

则 N_3 是 M 的正则 r 維子流形，N_1 与 N_2 同时是 N_3 的开子流形。$N_1\cap N_2$ 也是 N_3 的开子流形，因此是 $\mathfrak{M}$ 的 r 維积分流形，而且 $p\in N_1\cap N_2\subset U_1\cap U_2$.　証毕

其次，我們用 $\mathfrak{M}$ 来定义 M 的 r 維 C^∞-流形构造，用 $\mathfrak{M}$-拓扑来規定它的拓扑构造。对于各点 p，选定一个具有以上証明中所說性质的局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，以及通过 p 的 r 維积分流形 $N_1^{(p)}$，在这 $N_1^{(p)}$ 上，設有一个繞 p 周圍的局部坐标系 $(x^1\circ\iota, \cdots, x^r\circ\iota)$，其坐标邻域就是 $N_1^{(p)}$. 由于 $\{N_1^{(p)}\}$ 与 $\{(x^i\circ\iota)\}$ 可以在 M 内規定一个 r 維的 C^∞-流形构造，也就是說，§2.2 的(I)，(II)，(III) 是成立的。这个断言由以上(5)之証明是明显的。容易知道，这样規定出的流形构造，和以上 (x^i) 和 $N_1^{(p)}$ 的取法无关，这个 M 的新流形构造称为 $\mathfrak{M}$-构造。这样，又可以把 M 看做是 r 維的 C^∞-流形，記成 $M_{\mathfrak{M}}$. 从定义明显地看出，$M_{\mathfrak{M}}$ 是 M 的子流形 (作为集看待，$M_{\mathfrak{M}}$ 和 M 是一致的)。

注意　反之，对于 M 引进新的 r 維 C^∞-流形构造 M'，如果 M' 是 M 的

子流形，则对于 M 的各点 p，假設和 M' 在点 p 的切向量空間 $T_p(M')$ 成对应的分布是 $\mathfrak{M}$（$\mathfrak{M}$ 是完全可积(分)的 r 維 C^∞–分布），容易知道，由 $\mathfrak{M}$ 所決定的 $M_{\mathfrak{M}}$ 和 M' 是一致的。也就是說，M 上对合的 r 維 C^∞–分布 $\mathfrak{M}$、和使 M 作为它本身的 r 維子流形看待的 C^∞–流形构造之間形成一一对应的关系。

7．极大积分流形

在 n 維的 C^∞–流形 M 上，有 r 維的对合分布 $\mathfrak{M}$，对于 r 維的 C^∞–流形 $M_{\mathfrak{M}}$（上述）上的各点 p，$M_{\mathfrak{M}}$ 上包含 p 的連通部分記成 $W(p)$，因为 $M_{\mathfrak{M}}$ 是流形，所以 $W(p)$ 是 $M_{\mathfrak{M}}$ 的开集❶。因此，由于 $W(p)$ 是 $M_{\mathfrak{M}}$ 之开子流形，所以是 $\mathfrak{M}$ 的 r 維积分流形。这个积分流形称为 $\mathfrak{M}$ 过点 p 的极大积分流形。过点 p、$\mathfrak{M}$ 之 r 維积分流形 N 以內部拓扑連通时，则必有，

$$N \subset W(p).$$

事实上，由于 $\mathfrak{M}$–拓扑，由 N 极向其本身中去的恒等映射是連續的（参考上述(5)的証明），所以 N 关于 $\mathfrak{M}$–拓扑是連通的。更由于 N 是 $W(p)$ 的开集（关于 $\mathfrak{M}$–拓扑），所以它作为开子流形而被包含在 $W(p)$ 內。（一般，当流形 A 以 B 为子流形而包含 B，且 A 与 B 維数相同时，则 B 是 A 的开子流形，这从 §4.4 就可以知道。）

由以上所述，如 $\mathfrak{M}$ 的連通 r 維的积分流形 N_1 与 N_2，作为集看待时，$N_1=N_2$，则作为 C^∞–流形构造看待也是一致的。这是因为当取 $p\in N_1=N_2$ 时，N_1 与 N_2 是 $W(p)$ 的开子流形的緣故。

下面要提到 M 之二点属于同一极大积分流形的条件。首先，让我們定义一条所謂 M 的 C^ν–曲綫。由 R^1 之閉区間 $[a, b]$ 投到 M 中的映射为 $t\to p(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$；把这一映射扩充到由含有 $[a, b]$ 的开区間 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 投射到 M 中去的 C^ν–映射时，则称

$$p(t): \quad a\leqslant t\leqslant b$$

是 M 的 C^ν–曲綫（$p(t)$ 連續时，则称为連續曲綫）。它連接点 $p(a)$

---

❶ 由于 $M_{\mathfrak{M}}$ 的各点具有連通的邻域。

与点 $p(b)$，称 $p(a)$ 是始点，$p(b)$ 是終点。如果 $\nu \geqslant 1$，则在点 $p(t_0)$ 的周圍取局部坐标系 (x^i)，并設 $p(t)$ 的坐标(当 t 十分接近 t_0 时)是 $(x^i(t))$。在点 $p(t_0)$ 处，关于坐标系 (x^i)，以 $(\dot{x}^1(t_0), \cdots, \dot{x}^n(t_0))$ [这里 $\dot{x}^i = dx^i/dt$] 作为支量的向量 L_{t_0} 称为曲綫 $p(t)$ 在点 $p(t_0)$ 处的切向量。(容易知道 L_{t_0} 不依賴于局部坐标系 (x^i) 之选擇。)对于 $a \leqslant t \leqslant b$ 的各 t，如有

$$L_t \in \mathfrak{M}_{p(t)} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

成立，則称曲綫 $p(t)$ 是分布 $\mathfrak{M}$ 的**积分曲綫**。利用这种說法，有下述定理:

定理 設 C^∞-流形 M 上有对合的分布 $\mathfrak{M}$ 以及两点 p 与 q，p 与 q 属于 $\mathfrak{M}$ 之同一极大积分流形的必要与充分条件是，連結 p 与 q 的 $\mathfrak{M}$ 之 C^1-积分曲綫存在。

証明 設 p 与 q 属于 $\mathfrak{M}$ 之同一极大积分流形 $W(p)$，則因 $W(p)$ 是連通的流形，容易知道，p 和 q 可以用 $W(p)$ 內的 C^∞-曲綫連結起来。显然，这是 $\mathfrak{M}$ 的积分曲綫。反之，設 $p(t)$ 是連結 p 和 q 的 $\mathfrak{M}$ 之 C^1-积分曲綫，在曲綫 $p(t)$ 上任取一点 $p(t_0)$，又在它的周圍取局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，使 $\mathfrak{M}$ 在 $p(t_0)$ 的周圍用 $dx^{r+1} = 0, \cdots, dx^n = 0$ 表示出。設在这一坐标系下，$p(t)$ 之坐标是 $(x^i(t))$，則因 $p(t)$ 是积分曲綫，所以 $\dot{x}^{r+1}(t), \cdots, \dot{x}^n(t)$ 在 t_0 附近都等于 0。这就是說，$x^j(t)$，$r+1 \leqslant j \leqslant n$ 在 t_0 附近是定数，因此，当 t 非常接近 t_0 时，点 $p(t)$ 属于同一的极大积分流形。从此，如把区間 $[a, b]$ 充分地細分时，則可知点 $p(a) = p$ 和 $p(b) = q$ 也属于同一极大积分流形。 証畢

系 設 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是 C^∞-流形 M 的二个对合分布，如果在 M 的各点 p 上 $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{N}_p$，則通过 M 之各点 q，$\mathfrak{M}$ 之极大积分流形 $W_1(q)$ 和 $\mathfrak{N}$ 之极大积分流形 $W_2(q)$ 間有

$$W_1(q) \subset W_2(q)$$

成立，而且 $W_1(q)$ 是 $W_2(q)$ 的子流形。

証明　$W_1(q)\subset W_2(q)$ 由定理即可明了。关于后半段的事实，只要能説明 $M_{\mathfrak{M}}$ 是 $M_{\mathfrak{N}}$ 的子流形就行了。为了説明这桩事实，先説明由 $M_{\mathfrak{M}}$ 投射到 $M_{\mathfrak{N}}$ 中去的恒等映射是連續的（这时，ι 是 C^∞-映射。§6.4 之定理 1）。M 之子集 A 假設是 $\mathfrak{N}$-开集，在点 $p\in A$ 之周圍取局部坐标系 (x^i)，使 $\mathfrak{N}$ 以 $dx^{r+1}=\cdots=dx^n=0$ 表示出来。取 $\mathfrak{N}$ 之积分流形 $A_0\ni p$，使 $A_0\subset A$。如 A_0 取得充分小时，在 A_0 上可以使 $x^{r+1}=$常数，…，$x^n=$常数。对于各点 $q\in A_0$，以 $\mathfrak{M}_q$ 和它对应，在 A_0 上就得到 C^∞-分布 $\overline{\mathfrak{M}}$。显然，它是对合的。因此，通过点 p 的 $\mathfrak{M}$ 之积分流形 Z（A_0 之子流形）是存在的，Z 显然是 $\mathfrak{M}$ 的积分流形。这就是說满足 $Z\subset A_0\subset A$ 的 Z 是 $\mathfrak{M}$-开集。因此，ι 是連續的。由上述可知，$d\iota$ 是一对一的，因此，$M_{\mathfrak{M}}$ 是 $M_{\mathfrak{N}}$ 的子流形。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証毕

8. 第二可数性公理的影响

对于 C^∞-流形 M，如果引进第二可数性公理："在 M 中适当地选取由可数个开集所成的族 $\{U_i\}$，則 M 中任意的开集可以用族内某些个 U_i 之和集表示出来。"就可以获得更精細的性质。但因所需的基础知識写起来要占去較大的篇幅，所以这里把下面定理 1，2 的証明略去❶。

定理 1　如果 C^∞-流形 M 满足第二可数性公理，N 是 M 的連通子流形，則 N 也满足第二可数性公理。

定理 2　設 C^∞-流形 M 上有 r 維的对合 C^∞-分布 $\mathfrak{M}$，N 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 r 維积分流形。如果 F 是由 C^∞-流形 K 投射到 M 中去的 C^∞-映射，且

(1)　$F(K)\subset N$，

(2)　N 满足第二可数性公理

---

❶ 参考 C. Chevalley: Theory of Lie groups (Princeton, 1946)，第 3 章，§ 9，

成立，则 F 是由 K 投向 N 中的 C^∞-映射。

利用这些定理，可以使 §8.7 的系更加精密化。

定理 3 C^∞-流形 M 上有二个对合的分布 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$；在 M 的各点 p 上，設 $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{N}_p$。如果 M 满足第二可数性公理，且通过 M 之某一点 p_0、$\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 之极大积分流形 $W_1(p_0)$ 与 $W_2(p_0)$ 作为集看待是一致时，则 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$。

証明 由 §8.7 知道，$W_1(p_0) \subset W_2(p_0)$，而且 $W_1(p_0)$ 是 $W_2(p_0)$ 的子流形。从定理 1，$W_1(p_0)$ 满足第二可数性公理。因为由 $W_2(p_0)$ 投向 M 中去的恒等映射 ι 满足 $\iota(W_2(p_0)) = W_1(p_0)$，所以由定理 2 知道，$\iota$ 是从 $W_2(p_0)$ 投射到 $W_1(p_0)$ 中去的 C^∞-映射。由于 ι 是 C^∞-映射，$W_2(p_0)$ 和 $W_1(p_0)$ 作为 C^∞-流形看待是一致的，因此，它們的維数相同，从而 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的維数也相同。但由于在各点 p 上 $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{N}_p$，所以 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$。 証毕

利用同样的証法，可得

系 設 M 是 n 維的 C^∞-流形，$\mathfrak{M}$ 是 M 上的 r 維对合 C^∞-分布，$n>r$。那么，满足第二可数性公理，而且作为集合看待满足 $M=N$ 的 $\mathfrak{M}$ 之积分流形 N 是不存在的。

9. 例

例 1 §8.4 的例 3 所述的 R^{m+n} 上的 C^∞-分布

$$dy^i = \sum_{j=1}^{n} \varphi^i_j(x, y)dx^j \quad (i=1, \cdots, m)$$

如果是对合的，那末通过定义域内一点 $(y^{(0)}, x^{(0)})$ 的 n 維积分流形 W (取得充分小使它是正則的)，其局部坐标可以写成

$$y^i = f^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i=1, \cdots, m).$$

实际上，在点 $(y^{(0)}, x^{(0)})$ 周圍取 W 的局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$，并以

$$y^i = y^i(u^1, \cdots, u^n),\ x^j = x^j(u^1, \cdots, u^n)$$

表示，則 n 行 $m+n$ 列的矩陣

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^j}{\partial u^k}\right)_0 \quad (0 \text{ 表示 } x^{(0)}, y^{(0)} \text{ 之值})$$

之秩为 n。其实，这就是設 $(\partial x^j/\partial u^k)_0$ 的行列式不等于0.（如果能說明这桩事实，则因我們已取 $x^1, \cdots, x^n$ 作为 W 之局部坐标系，所以要証明的事項就推得了。）因为 W 是积分流形，所以

$$\frac{\partial y^i}{\partial u^k}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(y(u), x(u))\frac{\partial x^j}{\partial u^k}.$$

因此，矩陣 $(\partial y^i/\partial u^k, \partial x^j/\partial u^k)_0$ 的秩 n 等于矩陣 $(\partial x^j/\partial u^k)_0$ 之秩，于是 $\det(\partial x^j/\partial u^k)_0\neq 0$.

例 2 說明一个簡单的例子。$M=R^2$ 上的分布

$\mathfrak{M}$: $\quad adx+bdy=0 \quad (a, b$ 是定数，$a^2+b^2>0)$

是对合的，$\mathfrak{M}$ 之极大积分流形（这时是正则的）是由

$$ax+by=\text{常数}$$

所表示的直綫。由 $\mathfrak{M}$-拓扑所确定的 $M_{\mathfrak{M}}$ 不满足第二可数性公理。（在 §8.8 之系内，如果对于 N 不假定第二可数性公理，则可以发生相反的情況。这只要取 $M_{\mathfrak{M}}$ 代替 N 就可以看出。）这时的 $\mathfrak{M}$-拓扑，指的是只有接近直綫 $ax+by=$ 常数时，才有“某一点接近另外某一点”的說法，不能沿着任意方向接近。

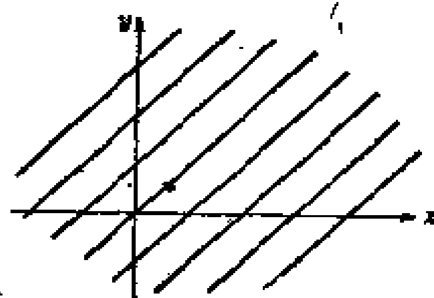


图 8.1

第2章 Lie 群

§9 Lie 群

1. 定义

集 G 称为 C^∞–**Lie 群**，如果它满足条件：

（Ⅰ）G 是群；

（Ⅱ）G 是 C^∞–流形；

（Ⅲ）群运算是 C^∞–映射。即

乘运算 $(a, b) \to a \cdot b$ 与逆运算 $a \to a^{-1}$ 分别看做是由 $G \times G$ 投射到 G 中的及由 G 投射到 G 中的映射，而且是 C^∞–映射。（$G \times G$ 意味着积流形（第1章，§5）。）

注意 如果 G 是 C^ω–流形（实解析的流形，第1章 §2.2），群运算是 C^ω–映射，则称 G 为 C^ω–Lie 群（或**实解析的 Lie 群**）。同样定义**复解析的 Lie 群**。由于这些 Lie 群可以进行同样的論述，所以此后只討論 C^∞–Lie 群，并把 C^∞–Lie 群簡称为 Lie 群。（其实，C^∞–Lie 群在本质上就是 C^ω–Lie 群，这是可以証明的，但这里从略。）

2. 例

例1 向量群 R^n 群运算取作向量加法，即对于 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 与 $y = (y^1, \cdots, y^n)$，規定

$$x + y = (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n).$$

其 C^∞–流形构造按照第1章 §2.2 所讲的那样取定，R^n 就成为 Lie 群。（其实是 C^ω–Lie 群。）这个 R^n 叫做 n 維向量群。

例2 綫性群 (linear group) 以实数为元素的 n 阶矩陣，其行列式不等于0的那些矩陣之全体所成的集合記成 $GL(n, R)$. 根据矩陣乘法，$GL(n, R)$ 构成一个群。n 阶矩陣（以实数为元素）之全体可以看成是一个 R^{n^2}，$GL(n, R)$ 是它的一个开集，从而 $GL(n, R)$ 是 R^{n^2} 的开子流形。因为

$GL(n, R)$ 是开子流形，所以它具有 C^∞-流形构造，关于这种构造，§9.1 之 (III) 是成立的。实际上，設 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 是 $GL(n, R)$ 的元素，以 $AB=(c_{ij})$，則

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

因此，c_{ij} 是 a_{ik} 和 b_{kj} 的 C^∞-函数。又由于 a_{ij}, b_{ij} 是关于局部坐标系的坐标，所以乘法运算 $(A, B)\to A\cdot B$ 是 C^∞-映射。若更以 $A^{-1}=(d_{ij})$，則因 d_{ij} 是 a_{ij} 的有理式，其分母是 $\det A(\neq 0)$，所以 d_{ij} 是 a_{ij} 的 C^∞-函数。照此說来，$GL(n, R)$ 构成一个 Lie 群，称为 n 次的**实一般綫性群** (real general linear group of degree n)。

同样，以复数为元素的 n 阶矩陣之全体（作为元素的各复数，分成实数部分与虚数部分去处理）可以看成是一个 R^{2n^2}. 其中行列式不等于 0 的那些矩陣之全体所成的集合記做 $GL(n, C)$. 和 $GL(n, R)$ 一样，它构成 Lie 群，称为 n 次的**复一般綫性群** (complex general linear group of degree n)。($GL(n, C)$ 也是复解析的 Lie 群。)

注意 今后以 R 表示实数的全体，以 C 表示复数的全体。

例 3 由实数体上有限維的向量空間 E 投射到它本身上的綫性映射之全体組成一个乘法群，記以 $GL(E)$. 取 E 之基底 $a_1, \cdots, a_n$；如所周知，$GL(E)$ 的元素和 $GL(n, R)$ 的元素形成一一对应。因此，群 $GL(E)$ 和 $GL(n, R)$ 作为抽象群看待是同构的。若以这同构映射作为 C^∞-拓扑映射，則在 $GL(E)$ 內可以引进 C^∞-流形构造。(容易知道，这种 C^∞-流形构造不依賴于 E 的基底之选择，而是一定的。) 这样，$GL(E)$ 构成 Lie 群是可以想象到的。同样，如果 E 是复数体 C 上的向量空間，那末利用 $GL(E)$ 和 $GL(n, C)$ 的同构对应，$GL(E)$ 也可以构成 Lie 群。

例 4 圓环群 T^1 R^2 上的圓周 $S^1: x^2+y^2=1$，如以前所提到的，是 R^2 的正則子流形。对于圓周上的任意一点 (x, y)，以絕对值为 1 的复数 $a=x+iy$ 和它对应，这种对应使得 S^1 和絕对值为 1 的复数全体所組成的乘法群 T^1 之間形成一一对应。由于这样的对应，如在 T^1 內导进 C^∞-流形构造，則 T^1 构成 Lie 群。因为 x, y 作为局部坐标系，乘法可以

$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(yu+xv)$$

来表示。这样的 T^1 叫做（一維的）**圓环群** (torus group 或 toroidal group)。

3. Lie 群的直积

設 G_1, G_2 是 Lie 群。作为群来說，G_1 与 G_2 的直积是 $G_1\times G_2$。另一方面，把 $G_1\times G_2$ 作为积流形，引进 C^∞-流形构造。容易知道，这样做时 $G_1\times G_2$ 是 Lie 群，称它为 Lie 群 G_1 与 G_2 的**直积**(direct product)。同样，可以規定 Lie 群 $G_1,\cdots,G_r$ 的直积为 $G_1\times\cdots\times G_r$。

例 n 个 T^1 的直积 $T^1\times\cdots\times T^1$ 写作 T^n，称为 n 維的圓环群。

4. Lie 群的同构

設 G_1, G_2 是 Lie 群，由 G_1 投射到 G_2 中的映射 F 如果是

(1) 由抽象群 G_1 投到抽象群 G_2 上的同构对应，

(2) 由 C^∞-流形 G_1 投射到 C^∞-流形 G_2 上的 C^∞-同胚映射(亦即，F 和 F^{-1} 同是 C^∞-映射)。

則称 F 是由 G_1 投向 G_2 的**同构映射**(若 $G_1=G_2$，則称 F 是**自同构映射**或簡称为**自同构**)。这样的 F 存在时，Lie 群 G_1 和 G_2 就称做**同构**。同构的 Lie 群在本质上看成是同一的。

例 1 向量群 R^p, R^q 之直积 $R^p\times R^q$ 和向量群 R^{p+q} 同构。

例 2 §9.2 例 3 之 $GL(E)$ 和 $GL(n, R)$ 同构。

§10 变 换 群

1. 作用于流形的 Lie 群

設 G 是 Lie 群，M 是 C^∞-流形。規定由积流形 $G\times M$ 投向 M 中的 C^∞-映射 $(g, p)\to\varphi(g, p)$，記为 $\varphi(g, p)=g\cdot p$，則当

(1) $e\cdot p=p\quad(p\in M)$，e 为 G 之单位元素，

(2) $g_1(g_2p)=(g_1g_2)p\quad(g_1, g_2\in G, p\in M)$

成立时，称 G 是在 M **左方起**(C^∞-的)**作用的**❶。同样可規定 G 在 M 右方起作用：由 $M\times G$ 投向 M 中的 C^∞-映射 $(p, g)\to p\cdot g$ 滿足

❶ 复解析的 Lie 群在复解析之流形 M 左方起复解析的作用，可以同样地定义。

(1)′ $p\cdot e=p$ $(p\in M)$,

(2)′ $(pg_1)g_2=p(g_1g_2)$ $(p\in M,\ g_1,\ g_2\in M)$

时,称 G 在 M 右方起作用。

G 在 M(左方)起作用时,称 G 是 M 的(左方)变换群。

以后为了簡单起見,称由 M 投向 M 上的 C^∞–同胚映射为 M 之 C^∞–变换。由此看来, G 在 M 左方起作用时, G 的任意一元素 a 所确定的、由 M 投向 M 中的映射 $\varphi_a: p\to a\cdot p$ 是 M 的 C^∞–变换。事实上,很明显地 φ_a 是由 M 投向 M 上的一对一的 C^∞–映射,而且因 $\varphi_a^{-1}=\varphi_{a^{-1}}$, 所以 φ_a^{-1} 也是 C^∞–映射。

定义 設 G 是在 M 左方起作用的。对于 M 之各点 p, 如果滿足

$$ap=p$$

的元素除单位元素 e 外,并不存在其他的任何元素 $a\in G$, 則称 G 在 M 有效地(effective)起作用。

2. 例

例 1 設 $M=R^n$, $G=GL(n,\ R)$. M 的点 x 以列向量 $x=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\\vdots\\x^n\end{pmatrix}$ 表示。以 $A=(a_j^i)\in GL(n,\ R)$. 如果规定 $y=Ax$ 为

$$y=\begin{pmatrix}y^1\\\vdots\\y^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^1&\cdots&a_n^1\\\vdots&&\vdots\\a_1^n&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\\vdots\\x^n\end{pmatrix},$$

亦即

$$y^i=\sum_{j=1}^n a_j^i x^j,$$

則明显地, G 在 M 左方起作用。这种作用是有效的。G 就是向量空間 R^n 的綫性变换群。(同样, $GL(E)$ 在向量空間 E 左方有效地起作用。)

例 2 要使 Lie 群 G 在 G 左方起作用,只要以 $(a,p)\to a\cdot p$, 取 G 之乘法作为結合法則就可以了。同样, G 也可在 G 右方起作用。这种作用是有效的。

例 3 在复数平面上加上一个无穷远点,得到 Gauss 球面。在这球面上, $GL(2,\ C)$ 所起的作用规定如下:

$$GL(2,\ C)\ni A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad ad-bc\neq 0.$$

并且对于复数 z，規定 $A(z)=\frac{az+b}{cz+d}\left(\text{当 } z=\infty \text{ 时，規定 } A(\infty)=\frac{a}{c}\right)$。这样規定的作用不是有效的。

实际上，对于任何 z，滿足 $A(z)=z$ 的 A，除单位矩陣 I 外，还有 I 的数量倍 σI，$\sigma\neq 0$ 也滿足它。

例 4 和 R^n 同样地把 n 个复数并列成 $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$ 之全体記成 C^n 时，C^n 是 $2n$ 維的 C^∞-流形，和 R^{2n} 同构。$GL(n, C)$ 在 C^n 左方有效地起作用。

§11 Lie 子 群

1. 定义

Lie 群 G (作为抽象群看待)的子群是 H，給 H 以一个 C^∞-流形构造。关于这个 C^∞-流形构造，如果 H 构成 C^∞-流形 G 的子流形，而且本身是 Lie 群时 (关于同一 C^∞-流形构造)，則称 H 是 G 的 **Lie 子群**。显然，如 Lie 群 G 在 C^∞-流形 M 左方起作用，則 G 之 Lie 子群 H 也在 M 的左方起作用。

定理 如果 H 是 Lie 群 G 的正則子流形，而且作为抽象群看待时是 G 的子群，則 H 是 G 的 Lie 子群。

証明 把 H 的运算 $(h_1, h_2)\to h_1h_2$, $h_1\to h_1^{-1}$ 当作映射 $H\times H\to H$, $H\to H$; 只要說明这种映射是 C^∞-映射就行了。映射 $(h_1, h_2)\to h_1h_2$ 使 $H\times H\to G\times G\to G$ 的映射

$$(h_1, h_2)\to(h_1, h_2)\to h_1h_2$$

相結合，所以 $H\times H\to G$ 是这样的 C^∞-映射，其原象落在正則子流形 H 中。因此，映射 $H\times H\to H$ 也是 C^∞-性的 (第 I 章 §6.4)。对于 $h_1\to h_1^{-1}$ 的說法，可以同样証明。 証毕

注意 1 在上述情况下，H 是 G 的閉集。因为，当 H 之点列 $\{h_i\}$ 收斂于 G 的元素 g 时，$\{h_i\}$ 在 G 内是 Cauchy 数列，因此，它在 H 內也是 Cauchy 数列。另一方面，在 H 之各点上具有含致密性閉包的邻域。所以 $\{h_i\}$ 是收斂于 H 的元素。反之，閉的 Lie 子群是正則的子流形(証明从略)。

注意 2 Lie 群 G (作为抽象群看待) 的子群为 H，G 之单位元素 e 的充

分小邻域U，除e以外和H沒有其他共同元素时，称H是G的离散子群，或者把它当做(0維的) Lie 子群。

注意3 对于 Lie 群G(作为抽象群看待)的子群H，給予一个C^∞-流形构造，使它成为 Lie 子群，这方法不是唯一的。但在以后将提到，当給予連通的C^∞-流形构造时，构成 Lie 子群的方法却最多只有一种。不連通的 Lie 子群是一种"未成熟的"概念，只有連通的 Lie 子群才值得加以研究，但目前则要顾及定义的一般化。

2. 固定群(或均等群)

为了获得 Lie 子群的实例，首先討論固定群。設 Lie 群G在C^∞-流形M左方起作用。对于M的点p，

$$H_p=\{a\in G; ap=p\}$$

显然是G的开集，而且当G作为抽象群看待时，是它的子群。这个H_p称为点p的**固定群或均等群(isotropy group)**。

定理 点p之固定群H_p是G的正則子流形。(从而，根据§11.1，关于其C^∞-流形构造，H_p是G的 Lie 子群。)❶

証明 对于已知的$g\in G$，C^∞-映射$G\to G$以

$$L_g(a)=ga \quad (a\in G)$$

来定义。而使$G\to M$的C^∞-映射θ以

$$\theta(a)=a\cdot p \quad (a\in G)$$

来定义。最后，对于已知的$g\in G$，使$M\to M$的C^∞-映射R_g以

$$R_g(q)=gq \quad (q\in M)$$

来定义。那么，得到

$$\theta\circ L_g=R_g\circ\theta.$$

事实上，$\theta\circ L_g(a)=\theta(ga)=(ga)p=g\cdot\theta(a)=R_g\circ\theta(a)$. 因此，若取映射的微分，就有

$$(d\theta)_{ga}\circ(dL_g)_a=(dR_g)_{ap}\circ(d\theta)_a.$$

❶ 复解析的 Lie 群G在复解析的流形M左方起复解析的作用时，則M上一点的固定群同样是G的(复解析的)正則子流形。

但因 L_g 与 R_g 分别是 G 和 M 的 C^∞-变换,所以它們的函数行列式在任何点上都不等于 0。这就是說,$(d\theta)_{ga}\circ(dL_g)_a$ 之秩等于 $(d\theta)_{ga}$ 的秩,$(dR_g)_{np}\circ(d\theta)_a$ 之秩等于 $(d\theta)_a$ 的秩。因此,$(d\theta)_{ga}$ 和 $(d\theta)_a$ 是同秩的。亦即 $d\theta$ 之秩在 G 上的任何一点都是定值。根据第1章 §6.5 知道,满足 $\theta(a)=p$ 的 $a\in G$ 所組成的集 H_p 是 G 的正則子流形。

注意 設 Lie 群 G 在 C^∞-流形 M_1, M_2 左方起作用,点 $p_i\in M_i(i=1,2)$ 的固定群为 H_{p_1} 和 H_{p_2},則 G 明显地通过形式 $(a,(q_1,q_2))\to(aq_1,aq_2)$ $(a\in G,q_i\in M_i,i=1,2)$ 在 $M_1\times M_2$ 左方起作用,而且点 $(p_1,p_2)\in M_1\times M_2$ 的固定群是 $H_{p_1}\cap H_{p_2}$。

§12 古典的綫性群

1. 特殊綫性群 $SL(n,R)$, $SL(n,C)$

$GL(n,R)$ 对实数体 R 起如下的作用:对于 $A\in GL(n,R)$ 和 $x\in R$,以 $A\cdot x=(\det A)x$。$x=1$ 的固定群是

$$SL(n,R)=\{A\in GL(n,R);\ \det A=1\}.$$

由 §3 知道,$SL(n,R)$ 是 $GL(n,R)$ 之閉子群,而且是正則的子流形,所以是 Lie 子群。这个群称为 n 次的**实特殊綫性群** (real special linear group of degree n)。同样,$GL(n,C)$ 之 Lie 子群

$$SL(n,C)=\{A\in GL(n,C);\ \det A=1\}$$

称为 n 次的**复特殊綫性群** (complex special linear group)。($SL(n,C)$ 是复解析的 Lie 群。)

2. 使已知的双綫性形式不变的綫性变换所成的 Lie 子群

由复数 n 阶矩陣 $K=(k_{ij})$ 組成 $(x^1,\cdots,x^n)$, $(y^1,\cdots,y^n)$ (x^i, y^i 是复变数)的双綫性形式

$$K(x,y)=\sum_{i,j}k_{ij}x^iy^j. \qquad (12.1)$$

假設由 $A\in GL(n,C)$ 所成的綫性变换

$$x^i=\sum a^i_j\tilde{x}^j,\quad y^i=\sum a^i_j\tilde{y}^j \quad (A=(a^i_j)) \tag{12.2}$$

使 $K(x, y)$ 变成

$$L(\tilde{x}, \tilde{y})=\sum_{i,j} l_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j,\quad L=(l_{ij}),$$

代进去計算时，得到

$$l_{ij}=\sum_{p,q=1}^{n} a^p_i k_{pq} a^q_j \quad (i, j=1, \cdots, n),$$

亦即

$$L={}^tA\cdot K\cdot A \quad ({}^tA \text{ 表示 } A \text{ 的轉置矩陣})。 \tag{12.3}$$

这是系数之变换法則。这时，如果 $L=K$ 成立，則称变换 (12.2) 使双綫性形式 (12.1) 不变。使 (12.1) 不变的所有綫性变换之全体記成

$$G(K)=\{A\in GL(n, C);\ {}^tAKA=K\},$$

显然，$G(K)$ 是 $GL(n, C)$ 的闭子集。如把 n 阶的复数矩陣之全体記成 $\mathfrak{gl}(n, C)$；則因它是实数体上的 $2n^2$ 維的向量空間，因而是 C^∞-流形。对于 $A\in GL(n, C)$ 和 $K\in\mathfrak{gl}(n, C)$，使 (12.3) 的 L 和它对应，容易知道 $GL(n, C)$ 是在 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 右方起作用的。就整个綫性变换群 (12.2) 而論，$G(K)$ 是 K 的固定群，因而是 $GL(n, C)$ 的 Lie 子群。$G(K)$ 是复解析的 Lie 群。

其次，暂不考虑双綫性形式 (12.1)，而让我們考虑共轭的双綫性形式

$$K(x, \bar{y})=\sum_{i,j} k_{ij}x^i\bar{y}^j \quad (\bar{y}^j \text{ 是 } y^j \text{ 的共轭复数}), \tag{12.4}$$

由变数的綫性变换 (12.2)，設 (12.4) 变成

$$M(\tilde{x}, \bar{\tilde{y}})=\sum_{i,j} m_{ij}\tilde{x}^i\bar{\tilde{y}}^j,\quad M=(m_{ij});$$

則 M 是由

$$M={}^tAK\bar{A},\quad \bar{A}=(\bar{a}^i_j) \tag{12.5}$$

給定的。从这式看出，$GL(n, C)$ 在 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 右方重新起作用，K 之固定群是

$$G_*(K)=\{A\in GL(n, C);\ {}^tAK\bar{A}=K\}.$$

因而，$G_*(K)$也是$GL(n, C)$的 Lie 子群。但$G_*(K)$不是复解析的 Lie 群。

完全同样地，对于n次的实数矩陣之全体$\mathfrak{gl}(n, R)$，按照(12.3)，$GL(n, R)$在它右方起作用($A \in GL(n, R)$, $K \in \mathfrak{gl}(n, R)$)。这时，$K$的固定群

$$G^{(R)}(K) = \{A \in GL(n, R)\,;\ {}^tAKA = K\}$$

是$GL(n, R)$的 Lie 子群。

3. 直交群，单式(酉)群，斜交(辛)群

在§12.2內把单位矩陣当作K，因此得出的$G(I)$, $G_*(I)$, $G^{(R)}(I)$分别写成$O(n, C)$, $U(n)$和$O(n)$:

$O(n, C) = \{A \in GL(n, C)\,;\ {}^tAA = I\}$称为$n$次的**复直交群**(complex orthogonal group)(复解析的)。

$U(n) = \{A \in GL(n, C)\,;\ {}^tA\bar{A} = I\}$称为$n$次的**单式群**(unitary group)。

$O(n) = \{A \in GL(n, R)\,;\ {}^tAA = I\}$称为$n$次的**实直交群**(或单称**直交群** real orthogonal group)。

其次，当n是偶数即$n = 2m$时，把双綫性形式$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{n+i} - x_{n+i}y_i)$所对应的矩陣

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},\ I_m\text{是}\ m\ \text{阶的单位矩陣}$$

取作K。同时，把$G(J)$, $G^{(R)}(J)$分别写成$S_p(m, C)$和$S_p(m, R)$，即

$$S_p(m, C) = \{A \in GL(2m, C)\,;\ {}^tAJA = J\}\ (\text{复解析的}),$$

$$S_p(m, R) = \{A \in GL(2m, R)\,;\ {}^tAJA = J\}$$

分别称为m次的**复斜交群**(complex symplectic group)及**实斜交群**(real symplectic group)。

以上所說的群都是固定群，因而，它們的交集仍是固定群。作

为例証，举出如下的群。

$SU(n)=SL(n, C)\cap U(n)$ … n 次特殊单式群 (special unitary group)，

$SO(n, C)=SL(n, C)\cap O(n, C)$ … n 次特殊复直交群 (special complex orthogonal group) (复解析的)，

$SO(n)=SL(n, R)\cap O(n)$ … n 次特殊实直交群 (special (real) orthogonal group)，

$S_p(m)=U(2m)\cap S_p(m, C)$ … m 次斜交群 (或单式斜交群) (symplectic group or unitary symplectic group)。

4. Lorentz 群

当 $K(x, y)$ 的形式是 $x_1y_1+\cdots+x_ry_r-x_{r+1}y_{r+1}-\cdots-x_ny_n$ 时，称 $G^{(R)}(K)$ 是慣性指数 $(r, n-r)$ 的 **Lorentz 群**。在相对性理論中出现的 Lorentz 群是 $n=4$，$r=3$ 的情况。

5. 致密性与連通性

$U(n)$，$SU(n)$，$S_p(m)$ 是 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 或 $\mathfrak{gl}(2m, C)$ 之有界閉集，因此是致密的。$O(n)$，$SO(n)$ 是 $\mathfrak{gl}(n, R)$ 之有界閉集，所以也是致密的。此外，如 $SL(n, C)$ 和 $SO(n, C)$ 等則不是致密的。

在上述各种群中，不連通的只有 $GL(n, R)$，$O(n)$，$O(n, C)$ 以及 Lorentz 群，其他的都是連通的。这里証明从略。

§13 Lie 环

1. 左側不变的向量場，Maurer-Cartan 的微分形式

由 Lie 群 G 的元素 a 所定义的 G 之 C^∞-变换 $x\to ax$ 以及 $x\to xa$ 分别記以 L_a 和 R_a。这些变换称为 G 的左或右平行移动。在 G 上定义的向量場 A，对于各 $a, b\in G$ 满足

$$dL_{ba^{-1}}A_a=A_b$$

时，就称 A 为**左側不变的**。同样可以定义右側不变的向量場。(当

左侧和右侧都不变时，就称为两侧不变。）其次，在 G 上定义的外微分形式 ω，对于各 $a, b \in G$ 满足

$$\delta L_{ba^{-1}} \cdot \omega_b = \omega_a$$

时❶，称 ω 为左侧不变的。同样，对于一般張量場之左、右侧不变性也可作出規定。特别，左侧不变的 Pfaff 形式叫做 **Maurer-Cartan 的微分形式**。如果 $X_1, \cdots, X_r$ 是左侧不变的向量場，ω 是 r 次左侧不变的外微分形式，则 G 上的函数

$$\omega(X_1, \cdots, X_r)$$

是定数。实际上，$a \in G$ 时

$$\begin{aligned}\omega_a((X_1)_a, \cdots, (X_r)_a) &= (\delta L_{a^{-1}}(\omega_e))((X_1)_a, \cdots, (X_r)_a) \\ &= \omega_e(dL_{a^{-1}}(X_1)_a, \cdots, dL_{a^{-1}}(X_r)_a) \\ &= \omega_e((X_1)_e, \cdots, (X_r)_e) \\ &= \text{一定数。}\end{aligned}$$

G 之单位元素 e 处的切向量空間 $T_e = T_e(G)$，对于 T_e 的任意元素 X，有左侧不变的向量場 A 存在，使 $A_e = X$。这样的 A 是唯一的。事实上，这就是求 $A_a = dL_a X\ (a \in G)$。如果把左侧不变的向量場之全体写作 $\mathfrak{g}$，明显地 $\mathfrak{g}$ 是实数体 R 上的向量空間（因为由 $A, B \in \mathfrak{g}$，可推得 $A+B \in \mathfrak{g}$ 和 $\lambda A \in \mathfrak{g}$（$\lambda$ 是实数））。上述的映射 $X \to A$ 是由 T_e 投于 $\mathfrak{g}$ 上的一对一之綫性映射，因此，$\mathfrak{g}$ 之維数等于 G 的維数。上述映射 $X \to A$ 称做由 T_e 投于 $\mathfrak{g}$ 上的标准同构映射。同样可以規定，由 T_e 之对偶向量空間 T_e^* 投向由 Maurer-Cartan 的微分形式之全体所成的向量空間 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准同构映射。

对于 $\omega \in \mathfrak{g}^*$，$X \in \mathfrak{g}$，定数 $\omega(X)$ 等于 $\omega_e(X_e)$。因此，从 T_e 和 T_e^* 之对偶性，知道 $\mathfrak{g}^*$ 和 $\mathfrak{g}$ 是互为对偶的向量空間。

注意 如果 G 是复解析的 Lie 群，则 $\mathfrak{g}$ 是复数体上的向量空間。

---

❶ 也可以說成，对于各 $a \in G$，满足 $\delta L_a \cdot \omega = \omega$。

2. Lie 环

定理1 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 之元素具有 C^∞-性。

証明 由于性质一样，因此只要对 $\mathfrak{g}^*$ 証明卽可。設 $\omega \in \mathfrak{g}^*$。关于 e 周圍的局部坐标系 (x^i)（坐标邻域 V），設 $\omega = \sum a_i(x)dx^i$，当 a 周圍的局部坐标系 (x^i)（坐标邻域 aV）由

$$x^i(ab) = x^i(b),\ b \in V$$

規定时，关于这一坐标系，在 a 之周圍 $\omega = \sum a_i(x)dx^i$。因此，只要說明在 e 周圍 $a_i(x)$ 是 C^∞-函数就可以了。e 关于 (x^i) 之坐标設为 $(0, \cdots, 0)$。关于坐标系 (x^i)，以 (x^i) 和 (y^i) 为坐标的二点設为 b 与 c。当 b, c 充分地接近于 e 时，$bc \in V$。$x^i(bc) = z^i$ 是 $(x^1, \cdots, x^n;\ y^1, \cdots, y^n)$ 的 C^∞-函数。因为 $L_b(c) = bc$，所以 $(dL_b)_c$ 之矩陣是 $(\partial z^i/\partial y^j)_{x,y}$。但因 $\delta L_b \omega_b = \omega_e$，如以 $(\partial z^i/\partial y^j)_{x,0} = \varphi^i_j(x)$，則

$$a_j(0) = \sum_i \varphi^i_j(x) a_i(x).$$

由于 $\varphi^i_j(x)$ 是 C^∞-函数，且 $\det \varphi^i_j(x) \neq 0$，所以 $a_i(x)$ 也是 C^∞-函数。 証毕

为了說明 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 时，其交换子积 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$，茲作以下的准备。

定理2 設 M, N 是 C^∞-流形，F 是由 M 投向 N 中的 C^∞-映射，A_1 与 A_2 是 M 上的 C^∞-向量場，B_1 与 B_2 是 N 上的 C^∞-向量場。如果对于各点 $p \in M$，有

$$(dF)_p A_{ip} = B_{iq} \quad (q = F(p)),\ i = 1, 2$$

成立（这时写 $(dF)A_i = B_i$），則

$$(dF)[A_1, A_2] = [B_1, B_2].$$

証明 在 p, q 的周圍取局部坐标系 (x^i), (y^j)，設

$$A_i = \sum_k \xi^k_i \partial/\partial x^k,\ B_i = \sum_l \eta^l_i \partial/\partial y^l \quad (i = 1, 2),$$

則

$$\eta^l_i = \sum_k \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\right) \xi^k_i \quad (i = 1, 2).$$

由簡单計算，得

$$\sum_j\left(\eta_1^j\frac{\partial\eta_2^l}{\partial y^j}-\eta_2^j\frac{\partial\eta_1^l}{\partial y^j}\right)=\sum_k\sum_i\left(\xi_1^i\frac{\partial\xi_2^k}{\partial x^i}-\xi_2^i\frac{\partial\xi_1^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial y^l}{\partial x^k}.$$

这就是

$$(dF)[A_1, A_2]=[B_1, B_2].$$

証毕

由于 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $dL_a(X)=X(a\in G)$ 是等价的，所以，如果 $X, Y\in\mathfrak{g}$，則

$$(dL_a)[X, Y]=[dL_a(X), dL_a(Y)]=[X, Y].$$

这就是說 $[X, Y]\in\mathfrak{g}$.

根据以上說明，$\mathfrak{g}$ 不但是实数体上的向量空間，而且对于 $X, Y\in\mathfrak{g}$，具有交換子积的运算 $[X, Y]$.

定理 3 設 X, Y, Z 是 $\mathfrak{g}$ 的任意元素，α, β 是任意实数，則

(1) $[\alpha X+\beta Y, Z]=\alpha[X, Z]+\beta[Y, Z]$ （左分配律）；

(2) $[Z, \alpha X+\beta Y]=\alpha[Z, X]+\beta[Z, Y]$ （右分配律）；

(3) $[X, X]=0$ （冪零律）；

(4) $[[X, Y], Z]+[[Y, Z], X]+[[Z, X], Y]=0$ （Jacobi 律）

成立。

証明 利用第 1 章，§7.6 提到过的公式就明白。

系 如 $X, Y\in\mathfrak{g}$，則 $[X, Y]=-[Y, X]$ （反称性）。

証明 由 $0=[X+Y, X+Y]=[X, X]+[Y, Y]+[X, Y]+[Y, X]$，得 $[X, Y]+[Y, X]=0$. 証毕

定义 对于实数体 R 上的向量空間 E，規定 E 内元素 X, Y 之积 $[X, Y]\in E$，这項积如满足上述性质 (1)～(4)，則称 E 是 $\boldsymbol{R}$ **上的 Lie 环**[1] (Lie 环是 Lie algebra 之譯名，如譯作 Lie 代数或

[1] 可以完全同样地規定复数体 C 上的 Lie 环。如果 G 是复解析的 Lie 群，則 $\mathfrak{g}$ 是复数体上的 Lie 环。

許还确切一些，但根据习惯，仍用 Lie 环这一名詞）。

用了这个名詞，我們就可以說，$\mathfrak{g}$ 的交換子积在实数体上組成 Lie 环。称 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 **Lie 环**。以 $X_1, \cdots, X_n$ 作为 Lie 环 E 之基底，由

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$$

規定的 n^3 个实数 C_{ij}^k，称为 E 关于基底 (X_i) 的**构造常数**。由定理 3 之(4)以及系知道，

$$\begin{cases} C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0 \quad (\text{特別}, C_{ii}^k = 0) \quad (1 \leqslant i, j, k \leqslant n) \\ \sum_h (C_{ij}^h C_{hk}^l + C_{jk}^h C_{hi}^l + C_{ki}^h C_{hj}^l) = 0 \quad (1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n) \end{cases}$$

成立。反之，当 C_{ij}^k 满足这些条件时，在 n 維向量空間 E（R 上的）上就規定了积，使得 E 构成 Lie 环，C_{jk}^i 就是它的构造常数。事实上，以 $X_1, \cdots, X_n$ 作为 E 之任意基底，对于 E 的元素 $X = \sum \xi^i X_i$，$Y = \sum \eta^i X_i$，以

$$[X, Y] = \sum_{i,j,k} \xi^i \eta^j C_{ij}^k X_k,$$

容易知道，(1)～(4) 是成立的，而且 $[X_i, X_j] = \sum C_{ij}^k X_k$。

取 $X_1, \cdots, X_n$ 作为 G 之 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的基底，关于这个基底，其构造常数設为 C_{jk}^i。取 $\mathfrak{g}^*$ 之基底 $\omega^1, \cdots, \omega^n$，使

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

（(ω^i) 是 (X_i) 的对偶基底。）由于 δL_a 和外微分 d 之可換性，故 $d\omega^i$ 是左側不变的。因此，如以 $(d\omega^i)_e = \sum_{j<k} \gamma_{jk} (\omega^j)_e \wedge (\omega^k)_e$（$\gamma_{jk}$ 是实数），則在 G 上到处都有

$$d\omega^i = \sum_{j<k} \gamma_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

成立。試确定系数 γ_{jk}。由第1章 §7.7，

$$d\omega^i(X_j, X_k) = \frac{1}{2}\left\{X_j \cdot \omega^i(X_k) - X_k \cdot \omega^i(X_j) - \omega^i([X_j, X_k])\right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \omega^i\left(\sum C_{jk}^h X_h\right) = -\frac{1}{2} C_{jk}^i,$$

因此从 $C^i_{jk}=-C^i_{kj}$ 就得到

$$d\omega^i=-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k.$$

于是有 $\gamma_{jk}=-C^i_{jk}(j<k)$，因而

$$d\omega^i=-\sum_{j<k}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k.$$

3. 对应于 Lie 子群的 Lie 子环

設 Lie 群 G 含有 Lie 子群 H，G 与 H 之 Lie 环各为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$. ι 是由 H 投于 G 中的恒等映射，对于 $X\in\mathfrak{h}$，因有 $X_e\in T_e(H)\subset T_e(G)$（切向量空間），所以存在 $Y\in\mathfrak{g}$ 使 $X_e=Y_e$. 显然，$Y\in\mathfrak{g}$ 是唯一确定的。使 $Y\in\mathfrak{g}$ 对应于 $X\in\mathfrak{h}$ 的映射写成 $\varphi:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$，则容易知道，$\varphi$ 是由 $\mathfrak{h}$ 投于 $\mathfrak{g}$ 中的綫性映射，而且是一对一的。因此，$\varphi(X)=Y$ 意味着

$(d\iota)X=Y$ （記号意义与 §13.2，定理 2 中的相同）。

所以对于 $X_1,X_2\in\mathfrak{h}$，有

$$\varphi([X_1X_2])=[\varphi(X_1),\varphi(X_2)]$$

成立。从而 $\varphi(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 之子向量空間，而且成立着：

如果 $Y_1, Y_2\in\varphi(\mathfrak{h})$，则 $[Y_1,Y_2]\in\varphi(\mathfrak{h})$.

在一般情况下，有如下的定义。

定义 实数体上之 Lie 环 E 的子集 F 称为 E 的 **Lie 子环**（或簡称为子环）；这意味着

(1) F 是 E 的子向量空間：如 $X,Y\in F$，则 $\alpha X+\beta Y\in F$ （α,β 是实数）❶，

(2) F 关于乘法 $[X,Y]$ 是关閉的：如 $X,Y\in F$，则 $[X,Y]\in F$.

（因此，F 在乘法 $[X,Y]$ 运算下，构成 Lie 环。）

使用这种説法，就可以説 $\mathfrak{h}$ 因 φ 而一对一地映射于 $\mathfrak{g}$ 之子环

---

❶ 对于复数体上的 Lie 环而言，则(1)内的 α,β 是复数。

$\varphi(\mathfrak{h})$上。因此，$\mathfrak{h}$ 的元素和 $\varphi(\mathfrak{h})$ 的元素在映射 φ 之下看做是同一的，即

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g};\ X_e\in T_e(H)\}\quad(=\varphi(\mathfrak{h})).$$

$\mathfrak{h}$ 称为**对应于 H 的 $\mathfrak{g}$ 之子环**。

注意 設有实数体上的 Lie 环 E, F 以及由 E 投于 F 中的映射 φ. 称 φ 是由 E 投向 F 中的**同态映射**，意指

(1) φ 是綫性映射，

(2) 对于 E 之各元素 X_1 与 X_2, $\varphi([X_1, X_2])=[\varphi(X_1), \varphi(X_2)]$

是滿足的。如果同态映射是由 E 投向 F 上的一对一映射，則称 φ 是**同构映射**。如果 E 与 F 間有同构映射存在，則写 $E\cong F$，并称 E 和 F 同构。上述的 $\mathfrak{h}$ 与 $\varphi(\mathfrak{h})$ 是同构的。(容易知道，由左側不变的向量場定义的 Lie 环和由右側不变的向量場定义的 Lie 环是同构的。) 由实数体上的 Lie 环 E_1 和 E_2 所成的直积(或称直和) $E_1\times E_2$ 是集 $\{(X_1, X_2); X_1\in E_1, X_2\in E_2\}$. 通过运算 $(X_1, X_2)+(Y_1, Y_2)=(X_1+Y_1, X_2+Y_2)$, $\lambda(X_1, X_2)=(\lambda X_1, \lambda X_2)$, $[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)]=([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$，在这集上定义了一个 Lie 环。容易知道 Lie 群 G_1 与 G_2 之直积 $G_1\times G_2$ 的 Lie 环和由 G_1 之 Lie 环 $\mathfrak{g}_1$ 与 G_2 之 Lie 环 $\mathfrak{g}_2$ 所成的直积是同构的。

4. 对应于 Lie 子环的連通 Lie 子群

在 Lie 群 G 內，含有单位元素的連通部分写成 G^0，由于 G 是流形，所以 G^0 是 G 的开子流形。容易知道，G^0 是 G 的子群。从此推得 G^0 是 G 的 Lie 子群(因为 G^0 是 G 的正則子流形)。更因 G^0 和 G 的維数相同，所以对应于 G^0 的 G 之 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的子环是 $\mathfrak{g}$。从 G^0 之連通性知道，在 G^0 上第二可数性公理是成立的[1]。因此 G^0 内的任何一个連通子流形都满足第二可数性公理(第1章，§8.8)。現設 $\mathfrak{g}$ 之子环 $\mathfrak{h}$ 的維数等于 r. G 的 r 維分布 $\mathfrak{M}$ 定义如下：設 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基底，由 $(X_1)_a, \cdots, (X_r)_a$ 架成的 $T_a(G)$ 之 r 維子空間記作 $\mathfrak{M}_a$. (容易明白，$\mathfrak{M}$ 不依賴于基底 $X_1, \cdots, X_r$

[1] 因为 G^0 是由单位元素之邻域作成的，所以它是由与 R^n 之开集同胚的可数个集之和組成的。

的取法。）由于 $X_1, \cdots, X_r$ 在 a 之周圍构成 $\mathfrak{M}$ 的基底，所以 $\mathfrak{M}$ 是 C^∞-分布，而且由于 $[X_i, X_j]$ 是 $X_1, \cdots, X_r$ 的綫性結合式（系数是常数），因此 $\mathfrak{M}$ 是对合的。設通过 e 的 $\mathfrak{M}$ 之极大积分流形为 H. H 是連通的，所以 $H \subset G^0$，从而 H 满足第二可数性公理。为了要証明 H 是 G 之子群，需要用如下的引理。

引理 設 f 是 C^∞-流形 M 之 C^∞-变换，$\mathfrak{M}$ 是 M 上对合的 C^∞-分布。当 M 上的分布 $\mathfrak{N}$ 以

$$\mathfrak{N}_q = (df)_p \mathfrak{M}_p \quad (q = f(p))$$

定义时，对于 $\mathfrak{M}$ 之任意极大积分流形 W，$f(W)$ 是 $\mathfrak{N}$ 之极大积分流形。从而，f 是使 $W \to f(W)$ 的 C^∞-同胚映射。

証明 差不多是自明的。

这个引理应用于 $M = G$，$\mathfrak{M}$: $a \to \{(X_1)_a, \cdots, (X_r)_a\}$，$f = L_a$ 时，则由 $dL_a(X_i) = X_i$，而有 $(dL_a)_p \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_{ap}$ $(a, p \in G)$. 因此，$\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{M}$ 是一致的。L_a 只是一种置换，它使 $\mathfrak{M}$ 之极大积分流形相互掉换。特别当 $a \in H$ 时，則有 $L_{a^{-1}}(H) \ni e$，因而有 $L_{a^{-1}}(H) = H$. 这就是說，对于 H 之各元素 a 和 b，有 $a^{-1}b \in H$. H 是 G（作为抽象群看待）的子群。

把使 $H \times H \to H$ 的映射 $(a, b) \to ab$ 看做是 C^∞-映射 $H \times H \to G \times G \to G$ 时，由第1章 §8.8 之定理2知，$(a, b) \to ab$ 是使 $H \times H \to H$ 的 C^∞-映射。同样，$H \ni a \to a^{-1} \in H$ 也是 C^∞-映射。因此，H 是 G 的 Lie 子群。对应于 H 的 $\mathfrak{g}$ 之子环是

$$\{X \in \mathfrak{g};\ X_e \in T_e(H) = \{(X_1)_e, \cdots, (X_r)_e\}\},$$

这和起初的 $\mathfrak{h}$ 是一致的。H 称为**对应于 $\mathfrak{h}$ 的連通 Lie 子群**。（其他的极大积分流形具有如 $L_a(H) = aH$ 这样的形式。）

反之，設 H 是 G 的 r 維連通 Lie 子群，在 §13.3 之意义下，設对应于 H 的 $\mathfrak{g}$ 之子环为 $\mathfrak{h}$. 由 $\mathfrak{h}$ 如上面所述的那样作出对应于它的連通 Lie 群 H'. 下面就来說明 H' 和 H 是一致的。

首先，如上面所述的那样，由 $\mathfrak{h}$ 作出 r 維的分布 $\mathfrak{M}$，对于 $\mathfrak{M}$，H 是它的 r 維积分流形，而且通过 e。根据 H' 之定义知 $H\subset H'$。因此，H 是 H' 的开子流形。再由 H' 之連通性，容易知道 e 在 H' 内之任意邻域組成 H'，于是 $H'=H$。

由此看来，由上述的对应关系，G 的連通 Lie 子群和 $\mathfrak{g}$ 的子环之間形成一一对应的关系。因此，对于連通 Lie 子群 H_i，如果有 Lie 子环 $\mathfrak{h}_i(i=1, 2)$ 和它对应，則 $H_1\subset H_2$ 和 $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2$ 是等价的。但如果 $H_1\subset H_2$，H_1 就成为 H_2 的 Lie 子群（第1章 §8.7，8）。特别有

定理　Lie 群 G 的連通 Lie 子群 H_1 与 H_2，如果作为集看待时是一致的，則它們的 C^∞-流形构造也是一致的。

5. $GL(n, C)$ 和 $GL(n, R)$ 的 Lie 环

設 $G=GL(n, C)$。$\sigma\in G$（σ 是矩陣）之元素記以 z_{kj}，z_{kj} 分成实数部分和虛数部分，写作 $z_{kj}=x_{kj}+iy_{kj}$。(x_{kj}, y_{kj}) 組成了 G 上的局部坐标系。以下就在这种局部坐标系之下考慮向量的支量。处于 σ 的切向量 L 之支量設为 $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$，$n^2$ 个复数 $(\alpha_{kj}+i\beta_{kj})$ 叫做 L 之**复支量**❶。L 之复支量可以看做是复数的 n 阶矩陣。特別当 X 属于 G 的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 时，X_σ 之复支量 A_σ 是以函数为元素的矩陣。由 X 之左側不变性，得

$$A_\sigma=\sigma\cdot A_e.$$

事实上，关于上述局部坐标系，左側平行移动 L_σ 可以表示为綫性变換，因此

$$dL_\sigma A_e=\sigma A_e=A_\sigma.$$

由于 A_σ 是以 G 上的 C^∞-函数（复数值的函数）作为元素的矩陣，对于它，如施以 $Y\in\mathfrak{g}$（对于矩陣的元素，其实数部分与虛数部分要分

---

❶ 也就是說，以 $GL(n, C)$ 作为复解析的 Lie 群，关于 $GL(n, C)$ 上的局部坐标系 (z_{kj})，L 之支量称做 L 的复支量也可以。

别对待),则得到一个复矩陣 $Y\cdot A_\sigma$ (第1章 §7.5)。如把 Y_σ 之复支量写成 B_σ,則由 $Y\cdot\sigma=B_\sigma$ 而得 $Y\cdot A_\sigma=B_\sigma A_e$,亦即函数之矩陣 $Y\cdot A_\sigma=Y(X\sigma)$ 在 $\sigma\in G$ 上的值等于 $B_\sigma A_e$。因此,$[X, Y]_\sigma$ 之复支量是

$$[X, Y]\cdot\sigma=X(Y\cdot\sigma)-Y(X\cdot\sigma)=A_\sigma B_e-B_\sigma A_e.$$

这就是說,$[X, Y]_e$ 之复支量等于 $A_eB_e-B_eA_e$。

对于 $X\in\mathfrak{g}$,以 X_e 之复支量 $A_e(=(X\cdot\sigma)_{\sigma=e})$ 和它对应的映射显然是由 $\mathfrak{g}$ 投于复 n 阶矩陣之全体所成(在实数体上)的向量空間 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中的一对一的綫性映射。$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之維数相等(都等于 $2n^2$),所以映射 $X\to A_e$ 是把 $\mathfrak{g}$ 投射于 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 上的。因此,以后在这种映射下,$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 視为是同一的。和 $\mathfrak{g}$ 之交换子积 $[X, Y]$ 对应的,是由上述从 $A, B\in\mathfrak{gl}(n, C)$ 所作的 $AB-BA$。后者写成 $[A, B]$,称为 A 与 B **之交换子积**(括号积)。

同样,$GL(n, R)$ 的 Lie 环可以看成是交换子积定义为 $[A, B]=AB-BA$ 的 n 阶实矩陣之全体所成的向量空間 $\mathfrak{gl}(n, R)$。

§14 Lie 群的同态,局部同构

1. Lie 群的同态

由 Lie 群 G_1 投于 Lie 群 G_2 中的映射 F 称为 **C^∞-同态映射**(或简称为 **C^∞-同态**),这指的是 F 是 C^∞-映射,对于 G_1 之各元素 a, b,有 $F(ab)=F(a)F(b)$ 成立。容易知道,这时 $F(e_1)=e_2$ (e_1, e_2 是 G_1, G_2 内之单位元素),$F(a^{-1})=F(a)^{-1}$ 是成立的。由于 $(dF)_{e_1}$ 是由 $T_{e_1}(G_1)$ 投向 $T_{e_2}(G_2)$ 中的綫性映射,故当 G_i 之 Lie 环是 $\mathfrak{g}_i$ ($i=1, 2$) 时,对于 $X\in\mathfrak{g}_1$,滿足 $(dF)_{e_1}X_{e_1}=Y_{e_2}$ 的 $Y\in\mathfrak{g}_2$ 是唯一确定的。从 X 与 Y 的左側不变性知道,这时对于各 $a\in G_1$,有

$$(dF)_aX_a=Y_b\quad(b=F(a)).$$

这就是說，如果用 §5.2 之定理 2 的記号，有 $(dF)X=Y$。称 Y 是 X 經 F 之微分 dF 而成的象。dF 是由 $\mathfrak{g}_1$ 投向 $\mathfrak{g}_2$ 中的綫性映射，并有

$$dF([X_1, X_2])=[dF(X_1), dF(X_2)]$$

成立(§5.2 之定理 2)，所以 dF 是由 Lie 环 $\mathfrak{g}_1$ 投向 Lie 环 $\mathfrak{g}_2$ 中的同态映射。

由 Lie 群 G 投向 $GL(n, C)$ 中的 C^∞-同态映射 F，称为 G 由 n 阶矩陣所成的（复）**表現**。dF 是由 G 之 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中的同态映射。一般，由 Lie 环 $\mathfrak{L}$ 投向 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中的同态映射称为 $\mathfrak{L}$ 由 n 阶矩陣所成的表現。因此，我們說 dF 是 $\mathfrak{g}$ 的表現。

試将表現的概念稍加以一般化。設 E 为复数体上的 n 維向量空間。由 Lie 群 G 投向 $GL(E)$ 中的 C^∞-同态映射，称之为 **G 在 E 上的表現**，E 叫做**表現空間**。（在 E 内取基底时，$GL(E)$ 可以看成是 $GL(n, C)$，所以，这項表現本质上和由 n 阶矩陣所成的表現是一样的。）同样，由 Lie 环 $\mathfrak{L}$ 投向 $\mathfrak{gl}(E)$（＝由 E 投向 E 中的綫性映射全体所成的向量空間内，以 $[A, B]=AB-BA$ 定义交换子积而得到的 Lie 环。它和 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 同构）中的同态映射，称做 $\mathfrak{L}$ 在 E 上的表現。如果 F 是 G 在 E 上的表現，則 dF 就是 $\mathfrak{g}$ 在 E 上的表現。所謂 G 与 $\mathfrak{g}$ 由 n 阶矩陣所成的表現，指的是它們在 C^n 上的表現。

Lie 群或 Lie 环在实数体之 n 維向量空間上的表現，可以完全同样地定义。

2. 局部同态和局部同构

所謂由 Lie 群 G_1 投向 Lie 群 G_2 中的 **C^∞-局部同态**，指的是由 G_1 之单位元素 e_1 的邻域 V 投向 G_2 中的 C^∞-映射 F，它对于 $a\in V$，$b\in V$ 和 $ab\in V$ 之类的 a，b，有 $F(ab)=F(a)F(b)$。对于这样的 F，和 §14.1 中同样地可以定义由 G_1 之 Lie 环 $\mathfrak{g}_1$ 投向 G_2

之 Lie 环 $\mathfrak{g}_2$ 中去的同态 dF。为了节省篇幅，以下列举定理而不加証明❶。

定理 1 对于由 $\mathfrak{g}_1$ 投向 $\mathfrak{g}_2$ 中去的任意同态 f，由 G_1 投向 G_2 中的 C^∞-局部同态 F 是存在的，且 $dF=f$。这样的 F 如果有两个时，则当充分地接近于单位元素时，两者是一致的。（特别当 G_1 是連通时，满足 $dF=f$ 的 C^∞-同态 F 最多只有一个。）

定理 2 設 G_1 是連通而且是单連通的（即 G_1 中任意的閉曲綫在 G_1 内可以連續地收縮成为一点），对于由 G_1 投向 G_2 中的任意 C^∞-局部同态 F，有由 G_1 投向 G_2 中去的 C^∞-同态 F_1 存在，而且在 G_1 的单位元素 e_1 的周圍（即 e_1 之充分小邻域内）有 $F=F_1$。

由 G_1 投向 G_2 中的 C^∞-局部同态 F 称为 **C^∞-局部同构**，这指的是，dF 是由 $\mathfrak{g}_1$ 投于 $\mathfrak{g}_2$ 上的一对一的同态，即是由 $\mathfrak{g}_1$ 投于 $\mathfrak{g}_2$ 上的同构。这时，e_1 之充分小的邻域 V_1，由于 F 可以一对一地拓扑映射到 e_2 的某一邻域 V_2 上，所以 F^{-1} 是由 V_2 投于 V_1 上的 C^∞-映射。就是說，这个 F^{-1} 是由 G_2 投向 G_1 中的 C^∞-局部同态。

由 G_1 投向 G_2 中的 C^∞-局部同构存在时，就称 G_1 和 G_2 是局部同构的。由定理 1, 2 可知，G_1 和 G_2 成局部同构的必要与充分条件是 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 同构。

定理 3 設 $\mathfrak{g}$ 是实数体上的任意 Lie 环（有限維），那么，以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的連通而且单連通的 Lie 群 G 是存在的。而且这样的 G 除同构外是唯一确定的。（$\mathfrak{g}$ 是复数体上的 Lie 环时，G 是复解析的。）

上述定理說明了 Lie 环对 Lie 群所起的作用。这就是說，当 Lie 环給定之后，Lie 群在局部同构范圍内是可以确定的。

例 显然一維 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 都是同构的。以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的 Lie 群，其例

❶ 証明可以参考 L. Pontrjagin: Topological groups (Princeton), 263 頁，定理 76; 或 C. Chevalley: Theory of Lie groups (Princeton), 113 頁，定理 2。

証有一維向量群（实数的加群）R^1 以及一維的圓环群 T^1. R^1 是单連通的。R^1 和 T^1 是局部同构，但不是同构的。（可以証明，以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的連通 Lie 群除 R^1 与 T^1 外，别无其他（同构除外）。）

§15　綫性 Lie 群的 Lie 环

1. 指数映射

由 n 阶复数矩陣 A 定义 n 阶复数矩陣 $\exp A$

$$\exp A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots \quad (I \text{ 是单位矩陣}).$$

設 $A=(a_{ij})$，$\max\limits_{i,j}|a_{ij}| \leqslant \rho$，容易知道，对于 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ 有 $|a_{ij}^{(k)}| \leqslant n^{k-1}\rho^{k-1}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 因此在范圍 $|a_{ij}| \leqslant \rho$ 内，級数 $\exp A$ 具有优級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} n^{k-1}\rho^{k-1}/k!$. 所以在这范圍内，級数 $\exp A$ 是一致收斂的。因此，映射 $A \to \exp A$ 是由复解析空間 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 投向 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中去的复解析的映射，特别地讲是 C^∞-映射。下面的一些性质是容易推知的。

(1) 当 $B \in GL(n, C)$，$A \in \mathfrak{gl}(n, C)$ 时，$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B$.

(2) $\det(\exp A) = \exp(T_rA)$，这里当 $A=(a_{ij})$ 时，$T_rA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. 从而，$\exp A$ 属于 $GL(n, C)$.

(3) 如 $AB=BA$，則 $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

(4) $\exp O = I$，$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$.

如果以 $\exp(tA) = Z(t)$，t 为实数，則

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A + \frac{tA^2}{1!} + \frac{t^2A^3}{2!} + \cdots = Z(t) \cdot A \quad (= A \cdot Z(t)).$$

因此，从这个微分方程之解 $Z(t)$（初始条件 $Z(0)=I$），可以定义 $\exp A$ 为 $\exp A = Z(1)$.

这样看来，$\exp$ 这一运算是由 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 投向 $GL(n, C)$ 中的 C^∞-映射，而且在 $A=\theta$ 处的函数行列式不等于 0. 事实上，比較

$Y=\exp X$ 两側之元素 ($Y=(y_{ij})$, $X=(x_{ij})$), 有

$$y_{ij}=\delta_{ij}+x_{ij}+(\text{高次項}),$$

因而

$$\left.\frac{\partial(y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{nn})}{\partial(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn})}\right]_{x_{ij}=0}=\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}=1.$$

所以, 在 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 内, 0 之适当邻域 U, 通过运算 exp 可以拓扑映射到 $GL(n, C)$ 内的 I 之某一邻域 V 上(第 1 章, §4.4)。

2. 綫性 Lie 群的 Lie 环

$GL(n, C)$ 的 Lie 子群 H 称为 (n 次的) **綫性 Lie 群**。H 之 Lie 环 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 的子环, 称为**綫性 Lie 环**。

$A\neq 0$ 时, $P=\{\exp tA; -\infty<t<\infty\}$ 作为一个抽象群看待, 显然是 $GL(n, C)$ 的子群。以下将說明 P 其实是 $GL(n, C)$ 的一維連通 Lie 子群。分成两种情况来討論。

(a) 使 $\exp tA=I$, $t\neq 0$ 的实数 t 不存在的情况。

这时, P 的元素 tA 和实数 t 是一一对应的, 因此可以使 t 在 P 上构成局部坐标系, 从而在 P 内导进 C^∞-流形构造。显然, P 是連通的 Lie 群(P 和一維的向量群 R^1 同构)。而且, 由 P 投向 $GL(n, C)$ 中的恒等映射 ι, 因 $\exp tA$ 之各支量是 t 的 C^∞-函数, 所以是 C^∞-映射。因此, ι 之微分 $d\iota$ 在各点上具有一定的阶数。实际上, 由于 $A\neq 0$, $\frac{d}{dt}(\exp tA)=A(\exp tA)$ 在到处都不是 0. 于是 P 是 $GL(n, C)$ 的子流形, 从而知道 P 是 $GL(n, C)$ 的連通 Lie 子群。

(b) 使 $\exp t_0 A=I$, $t_0\neq 0$ 的实数 t_0 存在的情况。

这时可設 $t_0>0$ (否則, 可以考慮 $-t_0$). 在大于 0 的 t_0 中必有最小的 t_0 存在。(設 $\exp t_m A=I$, $t_1>t_2>\cdots>0$, $\lim t_m=0$, 則 $\left[\frac{d}{dt}(\exp tA)\right]_{t=0}=\lim(\exp t_m A-I)/t_m=0$, 因而 $A=0$, 这就产生矛盾。) 这一最小的 t_0, 就記作 t_0. 对于 P 之元素 $\exp tA$, 以一

維圓环群 T^1 的元素 $\cos(2\pi t/t_0)+i\sin(2\pi t/t_0)$ 和它对应，容易知道，組成这种对应形式的映射是 P 与 T^1 間（作为抽象群看待）的同构映射。利用这个事实，由 T^1 之 C^∞–流形，在 P 内导入 C^∞–流形构造，那么，再仿照(a)同样地进行即可。

P 既如上述，是 $GL(n, C)$ 的 Lie 子群，那么，在 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 内和 P 相对应的 Lie 子环又是什么呢？因为 P 是一維的，所以和它对应的子环也是一維的。又由于 $\{\exp tA\}$ 是貫穿 P 中的 C^∞–曲綫，$t=0$ 处的切向量，即以 $\left[\frac{d}{dt}(\exp tA)\right]_{t=0}=A$ 为复支量的向量是属于 P 在单位元素处的切向量空間的。因此，由 A 架成的 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之一維子空間是对应于 P 的 Lie 子环的。

定理 設对应于 $GL(n, C)$ 的 Lie 子群 H 的 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之子环是 $\mathfrak{h}$，$A\in\mathfrak{gl}(n, C)$ 属于 $\mathfrak{h}$ 的必要与充分的条件是，$\{\exp tA; -\infty<t<\infty\}$ 被包含于 H 内。

証明 如果 $A\in\mathfrak{h}$，则由 A 所架成的一維子环被包含于 $\mathfrak{h}$ 内，其对应的連通 Lie 子群 $\{\exp\cdot tA; -\infty<t<\infty\}$ 被包含在和 $\mathfrak{h}$ 相对应的連通 Lie 子群（即 H 内单位元素之連通部分 H^0）内。从而也被包含在 H 内。

反之，当 $\{\exp tA; -\infty<t<\infty\}$ 含于 H 内时，分别考虑它們所对应的 Lie 子环，可得 $A\in\mathfrak{h}$。 証毕

3. 古典綫性群的 Lie 环

利用以上定理来决定对应于古典綫性群（§ 4）的 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 内之子环。正如把 $GL(n, C)$ 之 Lie 环写成 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 一样，$\mathfrak{gl}(n, C)$ 内和 $SL(n, C)$ 相对应的子环写成 $\mathfrak{sl}(n, C)$，并且用相应的小写德文字母来表示其对应的子环。

例 1 $SL(n, C)$，$SL(n, R)$．

$A\in\mathfrak{sl}(n, C)$ 和 $\det(\exp tA)=1\ (-\infty<t<\infty)$ 是等价的。

因 $\det(\exp tA)=\exp t\,T_rA$（由 § 15.1），所以 $A\in\mathfrak{sl}(n, C)$ 和 $T_rA=0$

是等价的。因此，

$$\mathfrak{sl}(n, C)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C)\,;\,T_rA=0\}.$$

从而有 $\dim SL(n, C)=\dim\mathfrak{sl}(n, C)=2(n^2-1)$.

同样地，$\mathfrak{sl}(n, R)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R)\,;\,T_rA=0\}$,

$$\dim SL(n, R)=\dim\mathfrak{sl}(n, R)=n^2-1.$$

例 2 $G(K)$, $G_*(K)$, $G^{(R)}(K)$ (記号說明見 §12.2).

把分别和 $G(K)$, $G_*(K)$, $G^{(R)}(K)$ 相对应的 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之子环順次写成 $\mathfrak{g}(K)$, $\mathfrak{g}_*(K)$, $\mathfrak{g}^{(R)}(K)$. $A\in\mathfrak{g}(K)$ 和

$$^t(\exp sA)K(\exp sA)=K\quad(-\infty<s<\infty)$$

是等价的。由于 $^t(\exp sA)=\exp s^tA$, 把两边关于 s 微分，得

$$^tA(\exp s^tA)K(\exp sA)-(\exp sA)K(\exp sA)A=0.$$

取 $s=0$, 則 $A\in\mathfrak{g}(K)$ 之必要条件是

$$^tAK+KA=0.$$

反之，当 A 滿足上述条件时，可以証明 $Z(s)=\exp sA\in G(K)$. 首先以

$$W(s)={}^tZ(s)\cdot K\cdot Z(s),$$

則

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}W(s)&=\frac{d}{ds}{}^tZ(s)\cdot K\cdot Z(s)+{}^tZ(s)\cdot K\cdot\frac{d}{ds}Z(s)\\&={}^tA^tZ(s)KZ(s)+{}^tZ(s)KZ(s)A\\&={}^tAW(s)+W(s)A.\end{aligned}$$

因此，$W(s)$ 是这个綫性常微分方程之解。另一方面，由于 $^tAK+KA=0$, 所以 $U(s)\equiv K$ 也是它的解。这样，从 $W(0)=K$ 以及滿足同一初始条件的解之唯一性，有 $U(s)=W(s)\ (-\infty<s<\infty)$, 卽 $W(s)=K\ (-\infty<s<\infty)$. 这就意味着 $Z(s)=\exp sA\in G(K)\ (-\infty<s<\infty)$. 于是

$$\mathfrak{g}(K)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C)\,;\,{}^tAK+KA=0\},$$

同样

$$\mathfrak{g}_*(K)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C)\,;\,{}^tAK+K\bar{A}=0\},$$

$$\mathfrak{g}^{(R)}(K)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R)\,;\,{}^tAK+KA=0\}.$$

例 3 从上述結果得到下頁的表 (关于备考栏里的証明，可以参照 C. Chevalley: Theory of Lie groups)。

Lie 群	Lie 环	維 数	备考(关于[ ]内的記号見后面补遺)
$O(n, C)$	$\mathfrak{o}(n, C)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C);\ {}^tA+A=0\}$	$n(n-1)$	非連通 連通部分 2 个 [2] $(n\geqslant 3)$ [∞] $(n=2)$
$SO(n, C)$	$\mathfrak{so}(n, C)=\mathfrak{o}(n, C)$ ($\mathfrak{o}(n, C)$之元素称为复反称矩陣)	$n(n-1)$	$O(n, C)$之連通部分 非单連通 [2] $(n\geqslant 3)$ [∞] $(n=2)$
$O(n)$	$\mathfrak{o}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R);\ {}^tA+A=0\}$	$n(n-1)/2$	非連通 [2] 連通部分 2 个
$SO(n)$	$\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{o}(n)$ ($\mathfrak{o}(n)$之元素称为实反称矩陣)	$n(n-1)/2$	$O(n)$之連通部分 非单連通 [2]
$U(n)$	$\mathfrak{u}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C);\ {}^tA+\bar{A}=0\}$ ($\mathfrak{u}(n)$之元素称为反称 Hermite 矩陣 (skew-hermitean))	n^2	連通 非单連通 [∞]
$SU(n)$	$\mathfrak{su}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C);\ {}^tA+\bar{A}=0,\ T_rA=0\}$	n^2-1	連通 单連通
$S_p(n, C)$	$\mathfrak{sp}(n, C)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n, C);\ {}^tAJ+JA=0\}$(注1)	$2(2n^2+n)$	連通 单連通
$S_p(n, R)$	$\mathfrak{sp}(n, R)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n, R);\ {}^tAJ+JA=0\}$	$2n^2+n$	連通 非单連通[∞]
$S_p(n)$	$\mathfrak{sp}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n, C);\ {}^tAJ+JA=0,\ {}^tA+\bar{A}=0\}$	$2n^2+n$	連通 单連通
$SL(n, C)$	$\mathfrak{sl}(n, C)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, C);\ T_rA=0\}$	$2n^2-n$	連通 单連通
$SL(n, R)$	$\mathfrak{sl}(n, R)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R);\ T_rA=0\}$	n^2-1	連通 非单連通 [2] $(n\geqslant 3)$ [∞] $(n=2)$
$GL(n, C)$	$\mathfrak{gl}(n, C)$	$2n^2$	連通 非单連通[∞]
$GL(n, R)$	$\mathfrak{gl}(n, R)$	n^2	非連通 [2] $(n\geqslant 3)$ [∞] $(n=2)$ 連通部分 2 个
Lorentz 群 $G^{(R)}(K)$ 惯性指数 $(r, n-r)$	$\mathfrak{g}^{(R)}(K)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R);\ {}^tAK+KA=0\}$(注2)	$n(n-1)/2$	非連通 連通部分 4 个 基本群見后面的补遺

注 1 $J=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$，$I=n$ 阶单位矩陣。

注 2 $K=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$，$I_r=r$ 阶单位矩陣；$I_{n-r}=n-r$ 阶单位矩陣 $(0<r<n)$．由此可知，要計算 $G(K)$，$G_*(K)$，$G^{(R)}(K)$ 之維数，归結为計算一次方程式。

补遺　关于基本群 (Poincaré 群)

对于連通 Lie 群 G，作它的 Lie 环 $\mathfrak{g}$，以 $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 环的連通而且单連通的 Lie 群設为 $\widetilde{G}$，由 $\widetilde{G}$ 投向 G 上的 C^∞–同态 F 是存在的，F 是 C^∞–局部同构的。F 之核 $\widetilde{D}$，即

$$\widetilde{D}=\{a\in\widetilde{G}; F(a)=e(=G\text{ 之单位元素})\}$$

是 $\widetilde{G}$ 之閉子群。可以証明，这个 $\widetilde{D}$ (看作抽象群，除同构外) 是不依賴于 $\widetilde{G}$ 与 F 之取法的。$\widetilde{D}$ 称为 G 之**基本群** (或 **Poincaré 群**)，記作 $\widetilde{D}=\pi_1(G)$．容易知道，連通 Lie 群之基本群必定是 Abel 群，而且是由有限个元素产生的。因此，基本群是好几个巡迴群(有穷或无穷的)之直积。基本群 $\pi_1(G)$ 表示 G 的非单連通性的程度。

上表备考栏内之記号 [　] 表示对应 Lie 群的(或其单位元素之連通部分)基本群。也就是說，$[k]$ 表示阶数为 k 的巡迴群。例如說 $SO(n)$ $(n\geqslant 3)$ 之基本群的阶数是 2，$SO(2)$ 及 $U(n)$ 之基本群是 $[\infty]$，即为无穷巡迴群。还有，慣性指数 $(r, n-r)$ 之 Lorentz 群的連通部分，其基本群 (为不失一般性，取作 $0<r\leqslant n-r<n$) 与直积

$$\pi_1(SO(r))\times\pi_1(SO(n-r))$$

同构。因此，例如說 $r\geqslant 3$，$n-r\geqslant 3$，則基本群是 $[2]\times[2]$，即阶数为 2 的两个巡迴群的直积。

第3章 Lie 环的一般理論

本章敘述 Lie 环論的基本事項——可解性，冪零性，可換性，半单純性，单純性之定义以及关于它們的主要定理，如 Engel 定理和 Lie 定理等。此外，还要介紹表現論的基本概念——既約性，可約性，完全可約性。最后还将提到，根据某种冪零子环(Cartan 子环)形成 Lie 环的分解及其性质，作为下一章的准备。所用的术語，是依照书末所載的参考文献[4]。

直到目前，我們都以实数体 R 上的 Lie 环作为主要对象。以下，却要以复数体 C 上的 Lie 环作为討論对象。复数体 C 上 Lie 环的許多概念与性质，和实数体 R 上的 Lie 环一样，是可加以定义和証明的。首先，对从 R 上之 Lie 环作出 C 上之 Lie 环的一种方法——所謂复素化——加以叙述。

§16 实数体上之 Lie 环的复形式

設 $\mathfrak{g}$ 是实数体 R 上的 n 維 Lie 环。記号 $X+iY$ ($X\in\mathfrak{g}$, $Y\in\mathfrak{g}$, i 是虚数单位：$i^2=-1$) 之全体所成的集写成 $\mathfrak{g}^C$. $\mathfrak{g}^C$ 之元素 $X+iY$ 与 $X'+iY'$ ($X, Y, X', Y'\in\mathfrak{g}$) 当 $X=X'$, $Y=Y'$ 时称为相等，写作 $X+iY=X'+iY'$. 对于集 $\mathfrak{g}^C$，按照以下的方式規定其中的运算：

(1) 复数倍：对于 $\alpha, \beta\in R$; $X, Y\in\mathfrak{g}$,

$$(\alpha+i\beta)\cdot(X+iY)=(\alpha X-\beta Y)+i(\beta X+\alpha Y).$$

(2) 加法：对于 $X, Y, X', Y'\in\mathfrak{g}$,

$$(X+iY)+(X'+iY')=(X+X')+i(Y+Y').$$

(3) 交換子积：对于 $X, Y, X', Y'\in\mathfrak{g}$,

$$[(X+iY), (X'+iY')]$$
$$=([X, X']-[Y, Y'])+i([X, Y']+[Y, X']).$$

容易知道，由运算(1)和(2)，使 $\mathfrak{g}^C$ 成为复数体 C 上的向量空間，而由运算(3)，又使 $\mathfrak{g}^C$ 成为 C 上之 Lie 环。我們称 $\mathfrak{g}^C$ 是 $\mathfrak{g}$ 之**复素化** (complexification) 成**复形式** (complex form)。在 $\mathfrak{g}^C$ 的元素中，特别把形式为 $X+i\cdot 0\,(X\in\mathfrak{g})$ 的元素看成和 $\mathfrak{g}$ 之元素 X 是同一的，并用 X 来記它。这样，$\mathfrak{g}$ 成为 $\mathfrak{g}^C$ 的子集。而且当把 $\mathfrak{g}^C$ 看成是 R 上的 Lie 环时，由 (1), (2), (3) 立刻知道，$\mathfrak{g}$ 成为 $\mathfrak{g}^C$ 在 R 上之子环。$\mathfrak{g}$ 称做 $\mathfrak{g}^C$ 之**实形** (real form)。一般，設 $\mathfrak{g}$ 是 R 上之 Lie 环，$\tilde{\mathfrak{g}}$ 是 C 上之 Lie 环，如果 $\mathfrak{g}^C$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 在 C 上是同构的，则 $\mathfrak{g}$ 称为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 之实形。虽說 R 上之 Lie 环的复形 (除同构外) 只可有一个，但 C 上之 Lie 环的实形不一定存在。如果存在，则可有二个以上互不同构的实形。

R 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的基底 $X_1, \cdots, X_n$ 也构成 $\mathfrak{g}^C$ 在 C 上的基底。事实上，$\mathfrak{g}^C$ 之元素 $X+iY$ 当

$$X=\sum_{k=1}^{n}\xi^k X_k, \qquad Y=\sum_{k=1}^{n}\eta^k X_k \quad (\xi^k, \eta^k\in R)$$

时，可以写成
$$X+iY=\sum_{k=1}^{n}(\xi^k+i\eta^k)X_k.$$

这是以复数为系数的关于 $X_1, \cdots, X_n$ 的綫性結合式。另外，$X_1, \cdots, X_n$ 在 C 上是綫性无关的。因为，当 $\sum_{k=1}^{n}(\xi^k+i\eta^k)X_k=0$ 时，有 $\sum\xi^k X_k=\sum\eta^k X_k=0$，因而 $\xi^k=\eta^k=0\,(k=1, \cdots, n)$。$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^C$ 关于基底 $X_1, \cdots, X_n$ 有同一的构造常数 C_{qr}^p。所有的 C_{qr}^p 都是实数。

从上面所讲的，容易看出

$$\mathfrak{g}^C=\mathfrak{g}+i\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}\cap i\mathfrak{g}=\{0\}[1].$$

---

[1] $\mathfrak{g}+i\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的元素 A 和 $i\mathfrak{g}$ 的元素 $iB\,(B\in\mathfrak{g})$ 的和集 $A+iB$。

一般，設有复数上之 Lie 环 $\tilde{\mathfrak{g}}$，$\tilde{\mathfrak{g}}$ 可以看作是实数体上的 Lie 环。如果 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 在实数体上有子环 $\mathfrak{g}$，且

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+i\mathfrak{g},\quad \mathfrak{g}\cap i\mathfrak{g}=\{0\},$$

則 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 和 $\mathfrak{g}^C$ 在 C 上是同构的，因而 $\mathfrak{g}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的实形。复数体上的 Lie 环 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 具有实形的必要和充分的条件，是当取 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 之适当的基底 $X_1, \cdots, X_n$ 时，所有的构造常数都是实数。这时关于 $X_1, \cdots, X_n$ 之实系数的綫性結合式所成的全体 $\mathfrak{g}$ 就是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 之实形。

例 1 由于 $\mathfrak{gl}(n,C)=\mathfrak{gl}(n,R)+i\,\mathfrak{gl}(n,R)$，$\mathfrak{gl}(n,R)\cap i\,\mathfrak{gl}(n,R)=\{0\}$，所以 $\mathfrak{gl}(n, R)$ 是 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 的实形。同样，$\mathfrak{o}(n)$ 是 $\mathfrak{o}(n, C)$ 的实形；$\mathfrak{sl}(n, R)$ 是 $\mathfrak{sl}(n, C)$ 的实形。此外，$\mathfrak{o}(n,C)$ 还有其他的实形。例如，由 $K(x, y)=x_1y_1+\cdots+x_ry_r-x_{r+1}y_{r+1}-\cdots-x_ny_n$ 作成之 Lorentz 群 (§12.4)，其 Lie 环 $\mathfrak{g}^{(R)}(K)$ 不管 r 取何值，总是 $\mathfrak{o}(n, C)$ 之实形。实际上，在复数范圍内进行变数变换 $x'_k=x_k$, $y'_k=y_k(k=1, \cdots, r)$, $x'_l=ix_l$, $y'_l=iy_l(l=r+1, \cdots, n)$ 时，有 $K(x, y)=x'_1y'_1+\cdots+x'_ny'_n(=I(x'y'))$。因此，$\mathfrak{g}^{(R)}(K)$ 之复形 $\mathfrak{g}^{(R)}(K)+i\mathfrak{g}^{(R)}(K)$，亦卽 $\mathfrak{g}(K)$，可以利用变数变换矩陣 T

$$T=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & i \end{array}\right)\begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow n-r \end{array}$$

变换 $\mathfrak{g}(I)=\mathfrak{o}(n, C)$ 而得到，卽 $\mathfrak{g}(K)=T^{-1}\,\mathfrak{o}(n, C)T$。因此，在 C 上 $\mathfrak{g}(K)$ 和 $\mathfrak{o}(n, C)$ 同构。这就是說，$\mathfrak{g}^{(R)}(K)$ 是 $\mathfrak{o}(n, C)$ 之实形。

§17 理想子环和剩余 Lie 环

C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之子集 $\mathfrak{h}$ 称为**理想子环** (ideal)，这指的是它满足下面两个条件：

(1) $\mathfrak{h}$ 作为 C 上的向量空間看待时，是 $\mathfrak{g}$ 的子空間，卽 X, $Y\in\mathfrak{h}$；α, $\beta\in C$ 时，$\alpha X+\beta Y\in\mathfrak{h}$。

(2) 如果 $X\in\mathfrak{h}$, $Y\in\mathfrak{g}$, 则 $[X, Y]\in\mathfrak{h}$ (因而 $[Y, X]=-[X, Y]$ 也属于 $\mathfrak{h}$)。

因此，$\mathfrak{g}$ 之理想子环必然是子环。

注意 1 对于以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的連通 Lie 群 G，設其中的連通 Lie 子群 H 对应于 $\mathfrak{g}$ 之子环 $\mathfrak{h}$，则可以証明，所謂"$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环"和"H 是 G 的不变子群"这两桩事实是等价的。

例 1 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之子环 $\mathfrak{sl}(n, C)$ 其实就是理想子环。事实上，如果 $X\in\mathfrak{gl}(n,C)$, $Y\in\mathfrak{sl}(n,C)$，則

$$T_r[X,Y]=T_rXY-T_rYX=0,$$

因而 $[X, Y]\in\mathfrak{sl}(n, C)$。同样，$\mathfrak{sl}(n, R)$ 是 $\mathfrak{gl}(n, R)$ 的理想子环。

例 2 $\mathfrak{o}(n,C)$ 是 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 之子环，但不是理想子环。

由 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 以及它的理想子环 $\mathfrak{h}$，按照下述方式可以作出一个 Lie 环。首先，由 $\mathfrak{g}$ 的子空間 $\mathfrak{h}$ 作商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (参看《代数学》)，作为 C 上的向量空間。$X\in\mathfrak{g}$ 关于 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}$ 之同余类記成 $\overline{X}$。$\overline{X}$, $\overline{Y}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之交换子积以

$$[\overline{X}, \overline{Y}]=\overline{[X, Y]}$$

規定出。如果 $X_1\equiv X_2(\mathrm{mod}\,\mathfrak{h})$, $Y_1\equiv Y_2(\mathrm{mod}\,\mathfrak{h})$，则由于 $\mathfrak{h}$ 是理想子环，所以

$$[X_1, Y_1]\equiv[X_2, Y_1]\equiv[X_2, Y_2]\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}).$$

因此，$[\overline{X}, \overline{Y}]$ 是唯一确定的，它和 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 之代表元素 X, Y 的取法无关。由于这种运算，$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 在 C 上成为一个 Lie 环。容易知道，由 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的映射 $A\to\overline{A}$ 是同态映射。$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之**剩余 Lei 环**，或簡称为**剩余环**。

注意 2 假設以 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 环的 Lie 群 G，有閉的不变子群 H。一般可以証明，G 之閉子群是 Lie 子群，而且也是正則的子流形。由于 H 是 Lie 子群，其对应子环設为 $\mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环。对于商群 G/H，以自然方式导进流形构造，由于这种构造使 G/H 成为 Lie 群，可以証明，其 Lie 环和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 成同构对应。

同态定理 設有 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 以及由它投向它本身上的同

态映射 f，如果 f 之核为 $\mathfrak{a}$，即

$$\mathfrak{a}=\{X\in\mathfrak{g};f(X)=0\},$$

则 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环。剩余环 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{g}$ 同构。

証明 很明显，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环。$A, B\in\mathfrak{g}$ 且满足 $A\equiv B \pmod{\mathfrak{a}}$ 时，$f(A)=f(B)$，因此，对于 $A\in\mathfrak{g}$ 之同余类 $\overline{A} \pmod{\mathfrak{a}}$，使 $f(A)$ 和它对应之映射 $\overline{f}$ 和 $\overline{A}$ 之代表元素 A 的取法无关。显然，映射 $\overline{f}$ 是由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 上的綫性映射，而且是同态映射，即

$$\overline{f}([\overline{A}, \overline{B}])=\overline{f}(\overline{[A, B]})=f([A, B])=[f(A), f(B)]$$
$$=[\overline{f}(\overline{A}), \overline{f}(\overline{B})].$$

最后，我們还知道 $\overline{f}$ 是一对一的。事实上，由 $\overline{f}(\overline{A})=0$ 得 $f(A)=0$，这就是說 $A\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$，于是 $\overline{A}=0$。从以上論証就知道 $\overline{f}$ 是由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 上的同构映射。 証毕

对于 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之子向量空間 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$，由形式为 $X+Y$ $(X\in\mathfrak{m}, Y\in\mathfrak{n})$ 的元素全体所成的集合記以 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$。以 $[X, Y]$ $(X\in\mathfrak{m}, Y\in\mathfrak{n})$ 之有限和 $\sum[X_i, Y_i]$ 作为元素，全体所成的集合記作 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$。明显地，$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ 和 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的子向量空間，而且 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]=[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]$。

同构定理 設有 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之子环 $\mathfrak{h}$ 以及 $\mathfrak{g}$ 之理想子环 $\mathfrak{a}$，则 $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之子环，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ 之理想子环；$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的理想子环，而且，$\mathfrak{h}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\approx\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$。

証明 由于 $[\mathfrak{h}+\mathfrak{a}, \mathfrak{h}+\mathfrak{a}]\subset[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]+[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}]+[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}]+[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$，所以 $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ 是子环，且 $\mathfrak{a}$ 明显地是 $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ 之理想子环。更由于 $[\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$，所以 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 之理想子环。由 $\mathfrak{h}$ 投向 $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ 上的映射 f，由定义 $f(H)=\overline{H}$ ($\bmod\ \mathfrak{a}$ 之同余类) 可知，它是同态映射，而且 f 之核是 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$。因此，从同态定理，得 $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}\approx\mathfrak{h}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$。 証毕

§18 可换 Lie 环、幂零 Lie 环和可解 Lie 环

設 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ 是 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，则 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 也是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环。事实上，如 $X\in\mathfrak{g}$, $M\in\mathfrak{m}$, $N\in\mathfrak{n}$, 由 Jacobi 法則，有

$$[X, [M, N]]=[[X, M], N]+[M, [X, N]].$$

因为 $[X, M]\in\mathfrak{m}$, $[X, N]\in\mathfrak{n}$, 所以右边属于 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$. 因此，$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]]\subset[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$. 亦即 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环。明显地有 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]\subset\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}$.

特別，当

$$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \mathfrak{g}''=[\mathfrak{g}'\mathfrak{g}'],\ \cdots,\ \mathfrak{g}^{(k)}=[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}],\ \cdots$$

时，所有的 $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$, $\cdots$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，而且

$$\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}'\supset\mathfrak{g}''\supset\cdots,$$

$\mathfrak{g}'$ 称为 $\mathfrak{g}$ 之**导出环或导出代数** (derived algebra), $\mathfrak{g}^{(k)}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 k 次导出环。如果有这样一个自然数 k, 对于它有 $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是**可解的**。

若以

$$\mathfrak{g}^1=\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1],\ \mathfrak{g}^3=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2],\ \cdots,\ \mathfrak{g}^k=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}],\ \cdots$$

则 $\mathfrak{g}^1$, $\mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{g}^3$, $\cdots$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，而且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^1\supset\mathfrak{g}^2\supset\mathfrak{g}^3\supset\cdots.$$

如有这样一个自然数 k, 使 $\mathfrak{g}^k=\{0\}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是**幂零的**(nilpotent)。

由于 $\mathfrak{g}^1\supset\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}^2=\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}^3=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2]\supset[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']=\mathfrak{g}''$, $\mathfrak{g}^4=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^3]\supset\mathfrak{g}'''$, $\cdots$, 一般成立着 $\mathfrak{g}^k\supset\mathfrak{g}^{(k-1)}$. 因此，如 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，则必是可解的。特别，满足 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]=\{0\}$ 的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 称为**可换的**。凡是可换的，一定是幂零的，因而也是可解的。

容易知道，如果 $\mathfrak{g}$ 是可解、幂零、可换的，则 $\mathfrak{g}$ 之子环也必是可解、幂零、可换的。而且 $\mathfrak{g}$ 之剩余环 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ 是理想子环)也是可解、幂零、可换的。因为从定义知道：

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)}=\mathfrak{g}^{(k)}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a},\quad (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{k}=\mathfrak{g}^{k}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\quad (k=1,2,\cdots).$$

例1 設V是C上的n維向量空間，它的基底是$e_1,\cdots,e_n$. 在$\mathfrak{gl}(V)$的元素中，那些在这基底表示下采取形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$（上半是三角矩陣，对角綫上都是0）

的矩陣之全体构成$\mathfrak{gl}(V)$之子空間，記作$\mathfrak{h}$. 而那些采取形式为

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$（上半是三角矩陣）

的矩陣之全体构成$\mathfrak{gl}(V)$之子空間，記作$\mathfrak{g}$. 容易看出，对于$A\in\mathfrak{gl}(V)$，如以$Ae_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^j e_j$，則有

$$A\in\mathfrak{g}\Leftrightarrow \alpha_i^j=0\,(j>i)\Leftrightarrow\begin{cases}Ae_1=\alpha_1^1e_1,\\ Ae_2=\alpha_2^1e_1+\alpha_2^2e_2,\\ \cdots\cdots\\ Ae_n=\alpha_n^1e_1+\alpha_n^2e_2+\cdots+\alpha_n^ne_n.\end{cases}$$

$$A\in\mathfrak{h}\Leftrightarrow \alpha_i^j=0\,(j\geqslant i)\Leftrightarrow\begin{cases}Ae_1=0,\\ Ae_2=\alpha_2^1e_1,\\ Ae_3=\alpha_3^1e_1+\alpha_3^2e_2,\\ \cdots\cdots,\\ Ae_n=\alpha_n^1e_1+\alpha_n^2e_2+\cdots+\alpha_n^{n-1}e_{n-1}.\end{cases}$$

因此，如果把$e_1,\cdots,e_r$所架成的V之子空間記成$V_r=\{e_1,\cdots,e_r\}$(以$V_0=\{0\}$)，則有

$$A\in\mathfrak{g}\Leftrightarrow AV_1\subset V_1,\,AV_2\subset V_2,\,\cdots,\,AV_n\subset V_n\Leftrightarrow Ae_i\equiv\alpha_i^ie_i(\mathrm{mod}\{e_1,\cdots,e_{i-1}\}),$$
$$i=1,\cdots,n,$$

$$A\in\mathfrak{h}\Leftrightarrow AV_1\subset V_0,\,AV_2\subset V_1,\,\cdots,\,AV_n\subset V_{n-1}\Leftrightarrow Ae_i\equiv0\,(\mathrm{mod}\{e_1,\cdots,e_{i-1}\}),$$
$$i=1,\cdots,n.$$

从此容易知道，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}$. 如果$A\in\mathfrak{h}$, $B\in\mathfrak{h}$，則

$$[A,B]V_i=(AB-BA)V_i\subset AV_{i-1}+BV_{i-1}\subset V_{i-2},$$

亦即$\mathfrak{h}^2V_i\subset V_{i-2}$. 同样，若$A\in\mathfrak{h}$, $B\in\mathfrak{h}^2$，則有

$$[A,B]V_i\subset AV_{i-2}+BV_{i-1}\subset V_{i-3},$$

亦即 $\mathfrak{h}^3V_i\subset V_{i-3}$。更一般有

$$\mathfrak{h}^kV_i\subset V_{i-k}.$$

特别，有 $\mathfrak{h}^nV_n\subset V_0=\{0\}$，亦即 $\mathfrak{h}^n=0$．这就是說 $\mathfrak{h}$ 是幂零的。因为 $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{h}$，所以 $\mathfrak{g}$ 是可解的。由簡單的計算知道，如果 A 是对角矩陣，且其对角綫上的元素互不相同时，$[A,\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}$．因此，$\mathfrak{g}^2=\mathfrak{g}^3=\cdots=\mathfrak{h}$，这就是說 $\mathfrak{g}$ 不是幂零的。

例 2 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 之子环 $\mathfrak{g}$ 称为可換 Lie 环，这和下面的事实等价：对于属于 $\mathfrak{g}$ 的任意矩陣 A, B，有 $AB=BA$ 成立。

§19 中心，最大幂零理想子环，根基

对于复数体 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$，以

$$\mathfrak{z}=\{X\in\mathfrak{g};[X, Y]=0(Y\in\mathfrak{g})\},$$

則明显地 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，而且是可換的。$\mathfrak{z}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 之**中心**。

$\mathfrak{g}$ 之可解理想子环（即 $\mathfrak{g}$ 之理想子环，当作 Lie 环它是可解的）中存在最大的一种。事实上，在理想子环中，設維数最高的为 $\mathfrak{R}$，則 $\mathfrak{g}$ 之任意的可解理想子环 $\mathfrak{a}$ 就被含于 $\mathfrak{R}$ 内。这是因为 $\mathfrak{R}+\mathfrak{a}$ 仍是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环。由于

$$\mathfrak{R}+\mathfrak{a}/\mathfrak{R}\approx\mathfrak{a}/\mathfrak{R}\cap\mathfrak{a},$$

$\mathfrak{R}+\mathfrak{a}/\mathfrak{R}$ 是可解的，因此，当 k 充分大时，$(\mathfrak{R}+\mathfrak{a})^{(k)}\subset\mathfrak{R}$．另一方面，$\mathfrak{R}$ 是可解的，所以当 l 充分大时，$\mathfrak{R}^{(l)}=\{0\}$．从而 $(\mathfrak{R}+\mathfrak{a})^{(k+l)}=\{0\}$．因此，$\mathfrak{R}+\mathfrak{a}$ 是可解理想子环，而且包含 $\mathfrak{R}$．比較它們的維数，有 $\mathfrak{R}+\mathfrak{a}=\mathfrak{R}$，所以 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{R}$．因而，$\mathfrak{R}$ 是唯一确定的。这个 $\mathfrak{R}$ 称做 $\mathfrak{g}$ 的**根基**。

其次，証明 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想子环中也有最大的一种。設 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之幂零理想子环中維数最高的，$\mathfrak{g}$ 之任意幂零理想子环 $\mathfrak{a}$ 被包含于 $\mathfrak{N}$ 内。要說明这一点，只要說明 $\mathfrak{a}+\mathfrak{N}$ 是幂零理想子环就可以

了。以 $\mathfrak{L}=\mathfrak{a}+\mathfrak{N}$，由于 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{N}]\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{N}$，因而有

$$\mathfrak{L}^2=[\mathfrak{L}, \mathfrak{a}]+[\mathfrak{L}, \mathfrak{N}]\subset\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^2,$$

$$\mathfrak{L}^3=[\mathfrak{L}^2, \mathfrak{a}]+[\mathfrak{L}^2, \mathfrak{N}]\subset\mathfrak{a}^3+\mathfrak{a}^2\cap\mathfrak{N}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{N}^2+\mathfrak{N}^3,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\mathfrak{L}^k\subset\mathfrak{a}^k+\mathfrak{a}^{k-1}\cap\mathfrak{N}+\cdots+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{N}^{k-1}+\mathfrak{N}^k.$$

因为 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$ 是冪零的，如取 k 充分大，可以使上式右边的每一項都为 $\{0\}$，从而 $\mathfrak{L}$ 也是冪零的。因此，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{N}$，而 $\mathfrak{N}$ 是唯一确定的。$\mathfrak{N}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 之**最大冪零理想子环** (maximal nilpotent ideal)。

$\mathfrak{g}$ 之中心 $\mathfrak{z}$，最大冪零理想子环 $\mathfrak{N}$ 和根基 $\mathfrak{R}$ 之間有关系

$$\mathfrak{z}\subset\mathfrak{N}\subset\mathfrak{R},$$

这是容易看出的。

例1 如果 $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ 是冪零 Lie 环，則 $\mathfrak{g}$ 之中心 $\mathfrak{z}$ 不是 $\{0\}$。因为当取 k 使满足 $\mathfrak{g}^{k-1}\neq\{0\}$, $\mathfrak{g}^k=\{0\}$ 时，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]=\{0\}$，因此，$\mathfrak{g}^{k-1}\subset\mathfrak{z}$。

例2 試求 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 之中心 $\mathfrak{z}$。由于 $A\in\mathfrak{z}\Leftrightarrow[A,X]=0(X\in\mathfrak{gl}(n,C))$，和 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 之每一元素可換的矩陣集合是 $\mathfrak{z}$。这种矩陣必是数量矩陣 $\alpha I(\alpha\in C)$。因此，$\mathfrak{z}$ 是一維的，$\mathfrak{z}=\{\alpha I;\ \alpha\in C\}$。

§20 单純 Lie 环和半单純 Lie 环

复数体上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$，除了 $\mathfrak{g}$ 和 $\{0\}$ 外，不再具有其他的理想子环时，就称 $\mathfrak{g}$ 是**单純的** (simple)。例如 $\mathfrak{g}$ 是一維的时候，显然是单純的。$\mathfrak{g}$ 如果是单純的，則 $\mathfrak{g}'$ 是 $\{0\}$ 或者是 $\mathfrak{g}$。如果 $\mathfrak{g}'=\{0\}$，則 $\mathfrak{g}$ 是可換的，而且 $\mathfrak{g}$ 之任意子向量空間都是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环。因此，$\dim\mathfrak{g}\geqslant2$ 时，$\mathfrak{g}$ 不会是单純的。这就是說，$\mathfrak{g}$ 是一維的。如果 $\mathfrak{g}'\neq\{0\}$，則 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{g}$ 不是可換的。这种情况是主要的。

复数体 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之根基是 $\{0\}$ 时，則称 $\mathfrak{g}$ 是**半单純的** (semi-simple)。以下将以半单純 Lie 环作为討論之主要对象。

例 非可換的单純 Lie 环是半单純的。实际上，$\mathfrak{g}$ 之根基設为 $\mathfrak{R}$，由于 $\mathfrak{R}$ 是理想子环，所以 $\mathfrak{R}=\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{R}=\{0\}$。如果 $\mathfrak{R}=\mathfrak{g}$，則 $\mathfrak{g}$ 是可解的，因而

$\mathfrak{g} \supsetneqq \mathfrak{g}' \supset \{0\}$. 于是 $\mathfrak{g}' = \{0\}$，亦即 $\mathfrak{g}$ 是可換的，这不合乎假設。

§21 表現論的基本事項

1. 定义

为了方便起見，让我們把 §14.1 所述的定义复习一下。設 $\mathfrak{g}$ 是复数体 C 上的 Lie 环，V 是 C 上的 n 維向量空間。从 V 投向 V 中的綫性映射之全体 $\mathfrak{gl}(V)$，对于 $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$，以 $[A, B] = AB - BA$ 来規定其交換子积，那么，$\mathfrak{gl}(V)$ 在 C 上組成一个 Lie 环。($\mathfrak{gl}(V) \approx \mathfrak{gl}(n, C)$.) 从 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的（作为 C 上的 Lie 环看待）同态映射 ρ，称为 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的（或在 V 处的）**表現** (representation)。V 称为表現 ρ 的**表現空間** (representation space)。$n = \dim V$ 称为表現 ρ 之**次数**。为了要把表現空間明白地表示出来，我們不单独写表現 ρ，而把它写成表現 (ρ, V).

从 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的映射 ρ 构成表現的条件詳細地写出来，那就是

(1) 綫性：

$\rho(\alpha X + \beta Y) = \alpha \cdot \rho(X) + \beta \cdot \rho(Y) \ (X, Y \in \mathfrak{g}; \alpha, \beta \in C)$,

(2) 交換子积之不变性：

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g}),$$

这也就是

$$\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

取 $X_1, \cdots, X_r$ 作为 $\mathfrak{g}$ 之基底，关于这一基底的构造常数論为 C_{ij}^k，則

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k X_k \quad (i, j = 1, \cdots, r). \tag{21.1}$$

如果 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 之表現，且

$$Y_i=\rho(X_i)\in\mathfrak{gl}(V)\quad(i=1,\cdots,r),$$

則

$$[Y_i,Y_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}Y_k\quad(i,j=1,\cdots,r)\qquad(21.2)$$

成立。反之，如有満足(21.2)的 $Y_1,\cdots,Y_r\in\mathfrak{gl}(V)$，对于 $\mathfrak{g}$ 的元素 $X=\sum\xi^iX_i$，以 $\rho(X)=\sum\xi^iY_i$，則 ρ 満足(1)，(2)是容易驗証的。因此，要求所有的 n 次表現这一問題，实际上就是求矩陣方程(21.2)所有的解 $(Y_1,\cdots,Y_r)$。(因为 V 上的基底确定后，$\mathfrak{gl}(V)$ 的元素 Y_i 是以矩陣来表示的。)

注意1　对于实数体上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$，有复向量空間上之表現(称做**复表現**)以及实向量空間上之表現(称做**实表現**)两种。$\mathfrak{g}$ 之复形 $\mathfrak{g}^c$ 在复向量空間上的表現明显地导出了 $\mathfrak{g}$ 之复表現，反之，$\mathfrak{g}$ 之复表現因为是(21.2)的解，所以給出了 $\mathfrak{g}^c$ 的表現。因此，$\mathfrak{g}^c$ 之表現和 $\mathfrak{g}$ 之复表現在本质上是同一的东西。

2. 等价表現

Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的两种表現 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2)，所謂在本质上是同一的，将由下面予以規定。V_1 投到 V_2 上的一对一的綫性映射 φ 适当选取后，如果 $X\in\mathfrak{g}$，$x\in V_1$，$\rho_1(X)x=y$，則 $\rho_2(X)\cdot\varphi(x)=\varphi(y)$，即 $\rho_2(X)\circ\varphi=\varphi\circ\rho_1(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 时，亦即 $\varphi^{-1}\circ\rho_2(X)\circ\varphi=\rho_1(X)$ 对于所有的 $X\in\mathfrak{g}$ 都成立时，称表現 (ρ_1,V_1) 和表現 (ρ_2,V_2) **等价**(equivalent)，写成 $(\rho_1,V_1)\approx(\rho_2,V_2)$。由于这一等价关系，显然可以把 $\mathfrak{g}$ 之表現的全体区分为若干类。每一类称为 $\mathfrak{g}$ 之**表現类**。

$\mathfrak{g}$ 的二个 n 次表現 (ρ_1,V_1)，(ρ_2,V_2) 之等价条件，如果利用矩陣的說法表示出来，則有如下述。取 V_1 之基底 $e_1,\cdots,e_n$ 与 V_2 之基底 $f_1,\cdots,f_n$，把 $\rho_1(X)$ 和 $\rho_2(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 用矩陣表示出来，那就是：对应于 $\rho_1(X)$ 和 $\rho_2(X)$ 之矩陣 $(\alpha_i^j(X))$ 和 $(\beta_i^j(X))$ 由

$$\rho_1(X)e_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^j(X)e_j \text{ 和 } \rho_2(X)f_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_i^j(X)f_j$$

所决定。如果 $(\rho_1, V_1)\approx(\rho_2, V_2)$，則由 V_1 投到 V_2 上的一对一之綫性映射 φ: $\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{n}\sigma_i^j f_j$, $\det(\sigma_i^j)\neq 0$ 存在，当 $\rho_1(X)x=y$ 时，由于 $\rho_2(X)\varphi(x)=\varphi(y)$ 成立，所以有

$$\rho_2(X)\varphi(e_i)=\sum_{j}\alpha_i^j(X)\varphi(e_j).$$

因此，从 $\rho_2(X)\varphi(e_i)=\rho_2(X)\sum_j\sigma_i^j f_j=\sum_{j,k}\sigma_i^j\beta_j^k(X)f_k$，得

$$\sum_{j,k}\sigma_i^j\beta_j^k(X)f_k=\sum_{j,k}\alpha_i^j(X)\sigma_j^k f_k.$$

比較 f_k 之系数，得到

$$\sum_j\sigma_i^j\beta_j^k(X)=\sum_j\alpha_i^j(X)\sigma_j^k,$$

即 $(\sigma_i^j)^{-1}\cdot(\beta_j^k(X))\cdot(\sigma_i^j)=(\alpha_j^k(X))$。这就是說，以常数矩陣 (σ_i^j), $\det(\sigma_i^j)\neq 0$，使 $(\beta_j^k(X))$ 变換而成矩陣 $(\alpha_j^k(X))$。反之，如果这样的矩陣 (σ_i^j) 存在，則倒施以上的計算即可求得 $(\rho_1, V_1)\approx(\rho_2, V_2)$。

3. 既約表現与可約表現

如果有 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V)，V 之子空間 U 滿足

$$\rho(X)\cdot U\subset U \quad (X\in\mathfrak{g}),$$

則称 U 是 **$\mathfrak{g}$-不变**(或簡称**不变**)子空間。V 与 $\{0\}$ 显然是 $\mathfrak{g}$-不变子空間。

如果除了 V 与 $\{0\}$ 外，再沒有其他的 $\mathfrak{g}$-不变子空間，那末表現 (ρ, V) 就叫做**既約的** (irreducible)。非既約的表現叫做**可約的** (reducible)。

設表現 (ρ, V) 是可約的，U 是除 V 与 $\{0\}$ 外的不变子空間。取 U 之基底 $e_1, \cdots, e_m$，扩大这个基底而組成 V 之基底 $e_1, \cdots, e_m, \cdots, e_n$。这时，对应于 $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$ 之矩陣 $(\alpha_i^j(X))$，

其形式有如下述。首先，由于 $\rho(X)e_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^j(X)e_j\equiv 0 \pmod U$ $(i=1, \cdots, m)$，所以 $\alpha_i^j(X)=0 (1\leqslant i\leqslant m,\ m+1\leqslant j\leqslant n)$，因此，

$$(\alpha_i^j(X))=\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\alpha_1^1(X)\cdots\alpha_m^1(X) \\ \\ \alpha_1^m(X)\cdots\alpha_m^m(X)\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots & \alpha_n^1(X) \\ \\ \cdots & \alpha_n^m(X)\end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix}\alpha_{m+1}^{m+1}(X)\cdots\alpha_n^{m+1}(X) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m+1}^n(X)\cdots\alpha_n^n(X)\end{matrix} \end{array}\right)\begin{matrix}\uparrow \\ m \\ \downarrow \\ \uparrow \\ n-m \\ \downarrow\end{matrix}. \tag{21.3}$$

反之，設关于 V 之某种基底，$\rho(X)$ 之矩陣可以"分裂"成如上形式，則基底中最初 m 个所架成的子空間是 $\mathfrak{g}$-不变的，因而 ρ 是可約表現。

設表現 (ρ, V) 是可約的，U 是 V 之 $\mathfrak{g}$-不变子空間，由于 $\rho(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 之定义区域限制在 U 上，由 $\rho(X)$ 产生了从 U 投到 U 中去的綫性映射。这映射称为 $\rho(X)$ 在 U 上的限制，以 $\rho(X)|U$ 表示。为了簡单起見，可以写作 $\rho(X)|U=\rho_U(X)$。ρ_U 显然是 $\mathfrak{g}$ 在 U 上的表現。表現 (ρ_U, U) 称为表現 (ρ, V) 在不变子空間 U 上所导引出的表現。当 (ρ_U, U) 是既約表現时，称 $\mathfrak{g}$-不变子空間 U 是既約的。如果 U 之基底照 (21.3) 的安排，則 (21.3) 內左上方的 m 次矩陣 $(\alpha_j^i(X))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ 就是对应于 $\rho_U(X)$ 的矩陣。其次，对于不变子空間 U，$\rho(X)$ 导出了 V/U (商向量空間)向自身投射的綫性映射，这种映射記以 $\rho(X)|V/U$。为了簡单起見，写成 $\rho(X)|V/U=\bar{\rho}(X)$，$\bar{\rho}$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 V/U 上的表現。表現 $(\bar{\rho}, V/U)$ 称为表現 (ρ, V) 在商空間 V/U 上所导出的表現。(21.3) 內右下方的 $n-m$ 阶矩陣是对应于 $\bar{\rho}(X)$ 的矩陣(取 $e_{m+1}, \cdots, e_n \pmod U$ 作为 V/U 之基底)。

4. 表现的張量积(張量和)

当 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 有表現 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 时，則如下述，可以在 $V_1\otimes V_2$ (張量积)上作出 $\mathfrak{g}$ 之表現。对于 $X\in\mathfrak{g}$，以[1]

$$\rho(X)=\rho_1(X)\otimes I_2+I_1\otimes\rho_2(X)\in\mathfrak{gl}(V_1\otimes V_2)$$

(I_i 是 V_i 的恒等映射)。明显地，ρ 是由 $\mathfrak{g}$ 投到 $\mathfrak{gl}(V_1\otimes V_2)$ 中的綫性映射，而且是 $\mathfrak{g}$ 在 $V_1\otimes V_2$ 上的表現。事实上

$$\begin{aligned}\rho([X, Y])&=\rho_1([X, Y])\otimes I_2+I_1\otimes\rho_2([X, Y])\\&=(\rho_1(X)\rho_1(Y)-\rho_1(Y)\rho_1(X))\otimes I_2\\&\quad+I_1\otimes(\rho_2(X)\rho_2(Y)-\rho_2(Y)\rho_2(X)).\end{aligned}$$

另一方面，由于 $\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X)$ 也等于上式的右边，所以

$$\rho([X, Y])=\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X).$$

把 ρ 写成 $\rho_1\oplus\rho_2$. $(\rho_1\oplus\rho_2, V_1\otimes V_2)$ 称为表現(ρ_1, V_1)和(ρ_2, V_2)的**張量和**(或称**張量积** tensor product)。

注意 2 設 Lie 群 G 在 V_i 上之表現是 $P_i(i=1,2)$，G 在 $V_1\otimes V_2$ 上之表現 P 定义为

$$P(a)=P_1(a)\otimes P_2(a).$$

写成 $P=P_1\otimes P_2$，称为表現 P_1 与 P_2 之張量积(或 Kronecker 积)。如果把 P，P_i 之微分写成 ρ，ρ_i，則由簡单計算知道，ρ 就是 $\rho_1\oplus\rho_2$，亦即

$$d(P_1\otimes P_2)=dP_1\oplus dP_2.$$

注意 3 三个以上的表現組成的張量积，可以同样地定义。

5. 逆步表現

对于 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V)，照以下那样，可以在 V^*(=V 上一次形式的全体組成的向量空間，即 V 之对偶向量空間)上作 $\mathfrak{g}$ 之表現。以

$$\rho^*(X)=-{}^t\rho(X)\quad(X\in\mathfrak{g}),$$

則 ρ^* 是 $\mathfrak{g}$ 在 V^* 上的表現。实际上，这只要从

---

[1] 对于 $A\in\mathfrak{gl}(V_1)$ 和 $B\in\mathfrak{gl}(V_2)$，$A\otimes B\in\mathfrak{gl}(V_1\otimes V_2)$ 是由 $(A\otimes B)(x\otimes y)=Ax\otimes By(x\in V_1, y\in V_2)$ 所定义的 $V_1\otimes V_2$ 的綫性映射。

$$\rho^*([X, Y]) = -{}^t\rho([X, Y]) = -{}^t(\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))$$
$$= -({}^t\rho(Y){}^t\rho(X) - {}^t\rho(X){}^t\rho(Y))$$
$$= \rho^*(X)\rho^*(Y) - \rho^*(Y)\rho^*(X)$$

就知道。表現 (ρ^*, V^*) 称为表現 (ρ, V) 之**逆步表現** (contragradient representation)。設 V 之基底是 $e_1, \cdots, e_n$，与之对应的 V^* 的对偶基底記以 $f_1, \cdots, f_n$，則有

$$(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

关于这些基底，$\rho(X)$ 和 $\rho^*(X)$ 之矩陣間的关系是簡单的，即一方的轉置矩陣变号就成为另一方的矩陣。

注意 对于 Lie 群 G 在 V 上的表現 P 和在 V^* 上的表現 P^*，以 $P^*(a) = {}^tP(a)^{-1}$ 来规定，P^* 称为 P 之**逆步表現**。把 P 和 P^* 之微分記成 ρ 和 ρ^*，則 ρ^* 是 ρ 的逆步表現。

例 1 設 $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{g}$ (V 是 C 上的向量空間)。对于 $\mathfrak{g}$ 之元素 A，以 A 自身和它对应，这样，就得到 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的表現 ρ。因此得到 $\mathfrak{g}$ 在

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{个}}$$

上的表現 $\rho_s^r = \rho \oplus \cdots \oplus \rho \oplus \rho^* \oplus \cdots \oplus \rho^*$。$\rho_s^r$ 称为 $\mathfrak{gl}(V)$ 在張量空間 V_s^r 上的**張量表現**。今后把 $\rho_s^r(A)$ 写成❶ A_s^r。当 (r, s) 型的張量 t 滿足

$$A_s^r t = 0$$

时，称 t 是在 A 上不变的 (r, s) 張量(詳細一点說，在无穷小的意义下 A 上不变的 (r, s) 張量)。对于 $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$，如果所有在 A 上不变的 (r, s) 張量在 B 上也是不变的，即对于 $t \in V_s^r$，

$$\text{如 } A_s^r t = 0 \text{ 則必有 } B_s^r t = 0$$

时，称 B 是 A 的**仿样** (replica)。利用仿样的概念，可以少用甚至不用計算而建立 Lie 环理論。关于这方面，可以参考书末的文献[2]。

6. 完全可約表現

所謂 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V) 是**完全可約的** (completely reducible)，指的是对于 V 之任意的 $\mathfrak{g}$-不变子空間 U，有适当的 $\mathfrak{g}$-不变子空

❶ 例如 $A_2^1 = A \otimes I \otimes I + I \otimes (-{}^tA) \otimes I + I \otimes I \otimes (-{}^tA)$.

間 W，使

$$V=U+W,\ U\cap W=\{0\}.$$

定理 1 表現 (ρ, V) 完全可約的必要与充分条件是，V 可以用既約的不变子空間 $V_1, \cdots, V_r$ 之直和形式表示出来，即 $V=V_1+\cdots+V_r$ (直和)❶。

証明 設 (ρ, V) 是完全可約的。因 V 不是既約的，所以 V 可以用直和的形式 $V=U_1+U_2$ 表示出来，这里的 U_1, U_2 是不变子空間。在 U_1 与 U_2 中，如果有非既約的，則对它进行同样的分解时，就能使 V 分解成为所求的形式。

反之，設 $V=V_1+\cdots+V_r$ (直和)，每一个 V_i 都是不变子空間。以 U 表示不变子空間，使 $V=U+W$，这时，如能証明 $U\cap W=\{0\}$ 的不变子空間 W 是存在的就好了。如 $U=V$，則以 $W=\{0\}$ 就可以了。所以假定 $U\neq V$。由这假定知道，有某一个 $V_{i_1}\not\subset U$。从 $V_{i_1}\cap U\subsetneqq V_{i_1}$，$V_{i_1}$ 之既約性以及 $V_{i_1}\cap U$ 之 $\mathfrak{g}$-不变性，得 $V_{i_1}\cap U=\{0\}$。如果 $U+V_{i_1}=V$，則以 $W=V_{i_1}$ 即得証。因此，假定 $U+V_{i_1}\neq V$，且有某一 $V_{i_2}\not\subset U+V_{i_1}$，和以上同样可以証得 $V_{i_2}\cap(U+V_{i_1})=\{0\}$。如此进行下去，直到可以适当选取 $V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots, V_{i_p}$ 使

$$(U+V_{i_1}+\cdots+V_{i_k})\cap V_{i_{k+1}}=\{0\},\quad k=1, 2, \cdots, p-1,$$
$$U+V_{i_1}+\cdots+V_{i_p}=V$$

为止。这时以 $W=V_{i_1}+\cdots+V_{i_p}$，則 W 就是所要求的。实际上，W 显然是 $\mathfrak{g}$-不变的，而且如果把 $x\in U\cap W$ 写成 $x=-u=v_{i_1}+\cdots+v_{i_p}$ $(u\in U,\ v_{i_k}\in V_{i_k},\ k=1, \cdots, p)$，則 $u+v_{i_1}+\cdots+v_{i_{p-1}}=-v_{i_p}\in(U+V_{i_1}+\cdots+V_{i_{p-1}})\cap V_{i_p}=\{0\}$，因此，$v_{i_p}=0$。同样，$v_{i_1}=\cdots=v_{i_p}=0$，因而 $x=0$。这就是説 $U\cap W=\{0\}$，$V=U+W$

❶ 这时，称 V 上的表現 ρ 是在 V_i 上所引起的表現 ρ_i 之直和 (direct sum)，写成 $\rho=\rho_1+\cdots+\rho_r$。

是很明显的。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証毕

例 2　設 G 是致密的实 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是它的 Lie 环(因而是实数体上之 Lie 环)。G 在 V(C 上的向量空間)上的表現 P 一定是完全可約的，这是可以了解的。由 P 的微分而得到的 $\mathfrak{g}$ 之表現 dP 也是完全可約的。(一般，如果 G 是連通的 Lie 群，則 G 之表現 P 是完全可約的。这件事实和 G 之 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的表現 dP 为完全可約是等价的。)

7. 伴随表現

把 C 上之 Lie 环 $\mathfrak{g}$，看成是 C 上的向量空間，那末，按照如下的方式，可以作出 $\mathfrak{g}$ 之表現，并使 $\mathfrak{g}$ 本身成为表現空間。那就是，对于 $A\in\mathfrak{g}$，規定 $ad(A)$ 为

$$ad(A)X=[A,\ X]\quad (X\in\mathfrak{g}),$$

則 $ad(A)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$。映射 ad 显然是由 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 中去的綫性映射，这实际上就是 $\mathfrak{g}$ 的表現。事实上，如果 $A,\ B\in\mathfrak{g}$，則

$$\begin{aligned} ad([A,\ B])X &= [[A,\ B],\ X]=[[A,\ X],\ B] \\ &\quad +[A,\ [B,\ X]]\quad (\text{Jacobi 法則}) \\ &=[A,\ [B,\ X]]-[B,\ [A,\ X]] \\ &=ad(A)ad(B)X-ad(B)ad(A)X\quad (X\in\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

因此，有　$ad([A,\ B])=ad(A)ad(B)-ad(B)ad(A)$.

表現 $(ad,\ \mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ **之伴随表現** (adjoint representation)。同样，如有 $\mathfrak{g}$ 之子环 $\mathfrak{h}$，对于 $H\in\mathfrak{h}$ 有 $ad(H)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 和它对应，則得到 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的表現。称为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表現。这时，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}$-不变子空間。

对于 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現而論，所謂 $\mathfrak{g}$-不变子空間究竟是怎样一回事? 我們知道，使 $\mathfrak{g}$ 之子向量空間 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$-不变的条件是 $ad(X)\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}$($X\in\mathfrak{g}$)。若改換写法，就是 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$。这一条件和使 $\mathfrak{a}$ 成为 $\mathfrak{g}$ 之理想子环的事实是等价的。

取 $\mathfrak{g}$ 之基底 $X_1,\ \cdots,\ X_n$，关于这一基底的构造常数記以 c_{jk}^i，

即 $[X_j, X_k]=\sum_{i=1}^{n} c_{jk}^{i} X_i \ (n=\dim \mathfrak{g})$；这时，試求 $X=\sum \xi^j X_j \in \mathfrak{g}$ 之伴随表現 $ad(X)$ 关于这項基底的矩陣 $(\alpha_i^j(X))$。

从
$$ad(X)X_i=\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j(X)X_j$$
得
$$\left[\sum_k \xi^k X_k, X_i\right]=\sum_{k,j} c_{ki}^j \xi^k X_j=\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j(X)X_j.$$
因此，$\alpha_i^j(X)=\sum_{k=1}^{n} c_{ki}^j \xi^k$，而所求的矩陣是

$$ad(X)\leftrightarrow\begin{pmatrix} \sum_k c_{k1}^1 \xi^k, & \cdots, & \sum_k c_{kn}^1 \xi^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_k c_{k1}^n \xi^k, & \cdots, & \sum_k c_{kn}^n \xi^k \end{pmatrix}.$$

由 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現而得到的象記为 $ad(\mathfrak{g})$，則
$$ad(\mathfrak{g})=\{ad(X); X\in \mathfrak{g}\}.$$
因此，$ad(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 之子环。伴随表現之核是滿足 $ad(A)=0$ 的 $A\in \mathfrak{g}$ 所成的集合。这就是 $\mathfrak{g}$ 之中心 $\mathfrak{z}$。因此，由同态定理，有
$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\approx ad(\mathfrak{g}).$$

注意 4 以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的 Lie 群設为 G，作由 G 投向 G 中的映射 $F_a(x)=axa^{-1}(x\in G)$，这里的 $a\in G$ 是固定的。容易知道，F_a 是由 G 投向 G 上的同构映射。因此，F_a 之微分 dF_a 是由 $\mathfrak{g}$ 投于 $\mathfrak{g}$ 上的一对一的同态映射，亦即同构映射。于是 $dF_a\in GL(\mathfrak{g})$。对应 $a\to dF_a$ 成为 G 在 $\mathfrak{g}$ 上之表現。写 A_d 为 $A_d(a)=dF_a$。因此，A_d 之微分是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上之表現，可以証明它就是 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現 ad。

8. 表現的不变張量

設有 Lie 群 G 之表現 (P, V)，V 之元素 v 在这表現下是不变的，这指的是对于 G 之每一元素 a，有
$$P(a)v=v$$
成立。当 G 是連通时，这个条件可以用 G 之 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 表达如下：設 P 之微分 $\rho=dP$，$\mathfrak{g}$ 具有在 V 上之表現 ρ。如果 G 是連通的，

则 $P(G)$ 是 $GL(V)$ 之連通 Lie 子群。可以証明，它的 Lie 环是 $\mathfrak{gl}(V)$ 之子环 $\rho(\mathfrak{g})$。因此，$GL(V)$ 之各元素可以写成形式

$$\exp\rho(X_1)\cdots\exp\rho(X_r), \quad (X_1, \cdots, X_r\in\mathfrak{g}).$$

于是，要 $v\in V$ 在 G 之表现 P 下是不变的充分必要条件为：对于 $\mathfrak{g}$ 之各元素 A，

$$\exp\rho(A)v=v. \tag{21.4}$$

这个条件和

$$\rho(A)v=0 \quad (\text{对于 } \mathfrak{g} \text{ 之各元素 } A) \tag{21.5}$$

是等价的。实际上，(21.4) 成立时，对于任意实数 t，有

$$\exp t\rho(A)v=v \quad (A\in\mathfrak{g}).$$

两边关于 t 微分，得 $\rho(A)\exp t\rho(A)v=0$. 这里以 $t=0$，就得出 (21.5)。反之，当 (21.5) 成立时，则有

$$\exp t\rho(A)v=\left(I+t\rho(A)+\frac{1}{2!}t^2\rho(A)^2+\cdots\right)v=v.$$

因此，以 $t=1$ 便得出 (21.4)。

一般可以这样讲，Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之表现 (ρ, V) 給定时，如果 V 之元素 v 满足 (21.5)，則称 v 在表現 (ρ, V) 下是**不变的**。

如有 Lie 群 G 之表現 (P, V)，我們可以在 V 的 (r, s) 型張量空間 V_s^r 上作出 G 的表現 P_s^r. 其作法是，对于 $x_1, \cdots, x_r\in V$；$f^1, \cdots, f^s\in V^*$，規定 V_s^r 之綫性映射 $P_s^r(a)\,(a\in G)$ 滿足

$$P_s^r(a)(x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^s)$$
$$=P(a)x_1\otimes\cdots\otimes P(a)x_r\otimes {}^tP(a)^{-1}f^1\otimes\cdots\otimes {}^tP(a)^{-1}f^s.$$

当 (r, s) 型之張量 $t\in V_s^r$ 在表現 P_s^r 之下不变时，就称 t 是表現 (P, V) 之 (r, s) 型**不变張量**。从簡单的計算知道，如以 $\rho=dP$，則 P_s^r 之微分 dP_s^r 由 $dP_s^r(A)=\rho(A)_s^r\,(A\in\mathfrak{g})$ 所給定。这里的 $\rho(A)_s^r$ (或写成 $\rho_s^r(A)$) 是 §21.5 之例中所述的、由 $\rho(A)$ 所定的 V_s^r 之綫性映射，即对于 $x_1, \cdots, x_r\in V$；$f^1, \cdots, f^s\in V^*$，

$$\rho(A)_s^r(x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^s)$$
$$=\sum_{i=1}^{r}x_1\otimes\cdots\otimes\rho(A)x_i\otimes\cdots\otimes x_r\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^s$$
$$+\sum_{j=1}^{s}x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes f^1\otimes\cdots\otimes(-{}^t\rho(A)f^j)\otimes\cdots\otimes f^s.$$

因此，在 G 是連通的情况下，要使 $t\in V_s^r$ 是 G 之表現 (P, V) 的不变張量，其条件是

$$\rho_s^r(A)t=0 \quad (\text{对于每一个 } A\in\mathfrak{g}).$$

这样的 $t\in V_s^r$ 称为 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V) 的**不变張量**。

容易知道，如 t, t' 是不变張量，則張量积 $t\otimes t'$ 也是不变張量，而且 t 經縮約以后而得的張量也是不变的。

例 3 如有 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ,V)，V 上的双綫性形式 φ 可以看成是 V 上的二阶协变張量❶：$\varphi\in V_2^0$。容易知道，

$$(\rho(A)_2^0\varphi)(x,y)=-\varphi(\rho(A)x,y)-\varphi(x,\rho(A)y) \quad (A\in\mathfrak{g};\ x,y\in V),$$

因此，φ 不变的条件是，对于各 $A\in\mathfrak{g}$ 与各 $x,y\in V$，有

$$\varphi(\rho(A)x,y)+\varphi(x,\rho(A)y)=0.$$

例 4 如有 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ,V)，V 上的 $(1,1)$ 型張量 T 可以看成是由 V 投向 V 中的綫性映射❷。$T\in\mathfrak{gl}(V)$。由簡单計算得

$$\rho(A)_1^1(T)=[A,T] \quad (A\in\mathfrak{g}).$$

因此，要 T 是表現 (ρ,V) 之不变張量，其条件是 T 构成和 $\rho(A)$ $(A\in\mathfrak{g})$ 可换的綫性映射。

9. 属于表現的不变双綫性形式，Killing 形式

对于 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V)，$\mathfrak{g}$ 上之双綫性形式

$$B_\rho(X,Y)=\mathrm{Tr}\,\rho(X)\rho(Y) \quad (X,Y\in\mathfrak{g})$$

称为属于表現 (ρ, V) 的双綫性形式。这是 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現的不变

---

❶，❷ 取定 V 之基底 $x_1,\cdots,x_n$；关于这一基底，二阶协变張量 t 和 $(1,1)$ 型的張量 T 之支量分别記以 (α_{ij}) 和 (β_j^i)，t 所決定的双綫性形式由 $t(x,y)=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\xi^i\eta^j$ $(x=\sum\xi^ix_i,\ y=\sum\eta^ix_i)$ 規定。T 所决定的綫性映射 $y=Tx$ 由 $\eta^i=\sum\beta_j^i\xi^j$ 規定。这种規定和 V 之基底的选擇方式无关。

双綫性形式，亦即

$$B_\rho(ad(Z)X, Y)+B_\rho(X, ad(Z)Y)=0 \quad (X, Y, Z\in\mathfrak{g}).$$

事实上，

$$\begin{aligned}B_\rho(ad(Z)X, Y)&=\mathrm{Tr}\rho([Z, X])\rho(Y)\\&=\mathrm{Tr}(\rho(Z)\rho(X)-\rho(X)\rho(Z))\rho(Y)\\&=-\mathrm{Tr}\rho(X)\rho(Z)\rho(Y)+\mathrm{Tr}\rho(X)\rho(Y)\rho(Z)\\&=-B_\rho(X, ad(Z)Y).\end{aligned}$$

显然，B_ρ 是对称的，即

$$B_\rho(X, Y)=B_\rho(Y, X) \quad (X, Y\in\mathfrak{g}).$$

特别当 ρ 是伴随表现时，将 B_ρ 写成 B，而有

$$B(X, Y)=\mathrm{Tr}\,ad(X)ad(Y).$$

这个 B 称为 $\mathfrak{g}$ 之**基本双綫性形式**或称 **Killing 形式**。$\mathfrak{g}$ 上之二次形式 $B(X, X)$ 称为**基本二次形式**。

10. 属于表现的特征多项式，Killing 多項式

对于 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之表现 (ρ, V)，設 $n=\dim\mathfrak{g}$，由

$$P_\rho(t;X)=\det(tI-\rho(X)) \quad (X\in\mathfrak{g},\ t\text{ 是变数})$$

所定的 t 之 n 次多項式称为属于表现 (ρ, V)，$X\in\mathfrak{g}$ 之**特征多項式**。特别当 ρ 是伴随表现时，将 P_ρ 写成 P，而有

$$P(t; X)=\det(tI-ad(X)).$$

$P(t;X)$ 称为 X 之 **Killing 多項式**。

§22 可解 Lie 环与冪零 Lie 环的表现

1. Engel 定理

定理 1 (Engel) 設 V 是复数体 C 上的有限維向量空間 $(\neq\{0\})$，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子环，$\mathfrak{g}$ 的元素設为冪零綫性映射。这时，V 中有元素 $e\neq0$ 存在，对于 $\mathfrak{g}$ 之任何元素 A 有 $Ae=0$.

証明 設 $\dim\mathfrak{g}=r$，利用归納法証明。$r=0$ 时是明显的。設 $r-1$ 时定理成立。首先証明，对于 $\mathfrak{g}$ 之任意子环 $\mathfrak{h}(\neq\mathfrak{g})$，有 $\mathfrak{g}$ 之

子环 $\mathfrak{h}_1$ 存在，使 $\mathfrak{h}_1 \supsetneqq \mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h} + 1$, $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表现 $H \to ad(H)$ 是以 $\mathfrak{h} \subsetneqq \mathfrak{g}$ 作为不变子空間的，因此，商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{h}$ 之表现空間。$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上之表现記以 ρ: $\rho(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. 如果 $H \in \mathfrak{h}$, 則 $H_1^1 \in \mathfrak{gl}(V_1^1)$ 也是幂零的，这是因为 $H_1^1 = H \otimes I - I \otimes {}^t H$, $H \otimes I$ 和 $I \otimes {}^t H$ 都是幂零的，而且显然是互为可换的。如果把 V_1^1 看做 $V_1^1 = \mathfrak{gl}(V)$ (§21.8, 例 4), 那么，对于 $X \in \mathfrak{gl}(V)$, $H_1^1(X) = [H, X]$. 因而 H_1^1 在 $\mathfrak{g}$ 上所引出的綫性映射是 $ad(H)$. 因此，$ad(H)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上是幂零的，从而 $\rho(H)$ 是在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的幂零綫性映射。由于 $\dim \rho(\mathfrak{h}) \leqslant \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g} = r$, 所以由归納法的假定，有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之元素 $\bar{X}$($X \in \mathfrak{g}$ 关于 $\bmod \mathfrak{h}$ 之同余类)存在，$\bar{X} \neq 0$, 且使 $\rho(H)\bar{X} = 0$ $(H \in \mathfrak{h})$. 这就意味着 $X \notin \mathfrak{h}$, $[H, X] \in \mathfrak{h}$ $(H \in \mathfrak{h})$. $\mathfrak{h}$ 和 X 所組成的 $\mathfrak{g}$ 之子向量空間記做 $\mathfrak{h}_1$ 时，则明显地 $\mathfrak{h}_1$ 具有所求之性质。

今以 $\mathfrak{h} = \{0\}$, 对于它作以上的 $\mathfrak{h}_1$, 而对于 $\mathfrak{h}_1$ 又同样地作 $\mathfrak{h}_2$, 如此順序进行，就得到 $\mathfrak{g}$ 之子环 $\mathfrak{h}_i$ 的序列

$$\begin{cases}\{0\} \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_r = \mathfrak{g}, \\ [\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_i, \ \dim \mathfrak{h}_i = i \quad (i = 1, \cdots, r-1).\end{cases}$$

$\mathfrak{h}_{r-1} = \mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，其維数为 $r-1$. 因此，若选取某一个 $A \in \mathfrak{g}$, 使 $A \notin \mathfrak{n}$, 则 $\mathfrak{g}$ 之任意元素 X, 可以用 $X = N + \alpha A$ $(N \in \mathfrak{n}, \alpha \in C)$ 这样的形式表达出来。以

$$U = \{x \in V;\ Nx = 0\ (\text{对于各 } N \in \mathfrak{n})\},$$

U 是 V 之子空間，归納法之假定适合于 $\mathfrak{n}$, 因而 $U \neq \{0\}$. 但 $A(U) \subset U$. 这是因为如果 $u \in U$, 则对于各 $N \in \mathfrak{n}$ 有

$$NAu = ANu + [N, A]u = 0 \quad (\text{注意 } [N, A] \in \mathfrak{n}).$$

因此，由于 A 是幂零的，所以 U 中有属于特征值为 0 的 A 之特征向量 $e(\neq 0)$: $Ae = 0$. 这个 e 显然就是所要求的。 証毕

系 1 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 之子环，$\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环，設 $\mathfrak{n}$ 之每一元

素都是冪零綫性映射。如果 V 作为 $\mathfrak{g}$ 之表現空間❶是完全可約的，則 $\mathfrak{n}=\{0\}$。

証明 以 $U=\{v\in V; Nv=0$ (对于每一个 $N\in\mathfrak{n}$)$\}$，由上述証明中見到，U 是 $\mathfrak{g}$-不变子空間，因此有 $\mathfrak{g}$-不变子空間 W，使 $V=U+W$ (直和)。如能証明 $W=\{0\}$ 就好了。如果 $W\neq\{0\}$，則有 $e\in W$, $e\neq 0$ 使 $Ne=0(N\in\mathfrak{n})$。于是 $e\in W\cap U$. 这就产生了矛盾。 証毕

系2 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}(V)$ 的子环，而且是由冪零綫性映射所組成的；对于 V 的适当基底 $e_1, \cdots, e_n$, $X\in\mathfrak{g}$ 的矩陣 $(\alpha_j^i(X))$ 滿足 $\alpha_j^i(X)=0(i\geqq j)$，就是說，矩陣有如下的形式

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * \\ 0 & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(从而，$\mathfrak{g}$ 成为冪零 Lie 环。因为它是 §18 例 1 内的 Lie 环 $\mathfrak{h}$ 之子环)。

証明 选取 $e_1\neq 0$ 使 $Xe_1=0(X\in\mathfrak{g})$，在 $\mathfrak{g}$ 之表現空間 $V/\{e_1\}$ 上，利用 Engel 定理，則可以得出 e_2: $e_2\notin\{e_1\}$, $Xe_2\equiv 0(\mathrm{mod}\, e_1)$ $(X\in\mathfrak{g})$. 其次，对 $V/\{e_1, e_2\}$ 引用同一定理，得出 e_3: $e_3\notin\{e_1, e_2\}$, $Xe_3\equiv 0(\mathrm{mod}\, e_1, e_2)$. 同样地进行下去，就可以求得 V 之基底 $e_1, \cdots, e_n$. 証毕

系3 由 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現所形成的 $\mathfrak{g}$ 之象 $ad(\mathfrak{g})$，如果其每一元素都是冪零綫性映射，則 $\mathfrak{g}$ 是冪零的 Lie 环 (Engel 定理)。(容易知道，逆定理也是成立的❷。)

証明 設 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之中心，則 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\approx ad(\mathfrak{z})$ 是冪零的，因此有 k

---

❶ $\mathfrak{g}$ 的元素 X 对应其本身所成的表現。

❷ 因为从 $\mathfrak{g}^k=0$ 可以得出 $ad(X)^k=0(X\in\mathfrak{g})$.

存在，使 $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}$。从而，$\mathfrak{g}^{k+1} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}] = \{0\}$。 証毕

2. Lie 定理

引理 1 設 $A \in \mathfrak{gl}(V)$，$n = \dim V$。如果

$$\operatorname{Tr} A = 0,\ \operatorname{Tr} A^2 = 0,\ \cdots,\ \operatorname{Tr} A^n = 0,$$

則 A 是冪零的綫性映射。

証明 設 A 之特征值为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，則

$$0 = \operatorname{Tr} A^k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k \ (k = 1, 2, \cdots, n).$$

由代数学里熟知的定理可知，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的所有基本对称式都等于 0。从而，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$。同时，由代数学里的知識可知，$A$ 是冪零的。 証毕

引理 2 $\mathfrak{gl}(V)$ 之子环 $\mathfrak{g}$ 的中心記以 $\mathfrak{z}$，則 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z}$ 之每一元素是冪零的。

証明 如果把 $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z}$ 表达成 $A = \sum [X_i, Y_i]$ $(X_i, Y_i \in \mathfrak{g})$，則显然有 $\operatorname{Tr} A = 0$ 成立。再从 $[A^k, X_i] = 0$，得到

$$\operatorname{Tr} A^{k+1} = \sum \operatorname{Tr} A^k [X_i, Y_i] = \sum \operatorname{Tr} [A^k, X_i] Y_i = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

因此，从引理 1 知道 A 是冪零的。 証毕

定理 2 如果 $\mathfrak{gl}(V)$ 之子环 $\mathfrak{g}$ 在 V 上是完全可約的，則 $\mathfrak{g}$ 之根基 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{g}$ 之中心 $\mathfrak{z}$ 是一致的，即 $\mathfrak{R} = \mathfrak{z}$。

証明 由引理 2 及 §22.1 之系 1，有 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z} = \{0\}$。現在証明，如果 $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{z}$，則必产生矛盾。由于 $\mathfrak{R}/\mathfrak{z} \neq \{0\}$ 是可解的，所以有满足 $(\mathfrak{R}/\mathfrak{z})^{(k)} = \{0\}$ 和 $(\mathfrak{R}/\mathfrak{z})^{(k-1)} \neq \{0\}$ 的 k。以 $\mathfrak{R}^{(k-1)} + \mathfrak{z} = \mathfrak{a}$，則因 $\mathfrak{R}^{(k)} \subset \mathfrak{z}$，所以 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{z}$，因此，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z} = \{0\}$，亦即 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$。但 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ 之任何元素都是冪零的綫性映射。事实上，如果把 $A \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ 写成 $A = \sum [A_i, X_i]$ $(A_i \in \mathfrak{a}, X_i \in \mathfrak{g})$，則由 $\operatorname{Tr} A = 0$ 及 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$ 可以得到

$$\operatorname{Tr} A^{k+1} = \sum \operatorname{Tr} A^k [A_i, X_i] = \sum \operatorname{Tr} [A^k, A_i] X_i = 0$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1,\ n = \dim V)$，因而，$A$ 是冪零的。再由 §22.1 之系

1，有 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]=\{0\}$，亦即 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{z}$。因此，$\mathfrak{R}^{(k-1)}\subset\mathfrak{z}$。这和 $(\mathfrak{R}/\mathfrak{z})^{(k-1)}\neq\{0\}$ 矛盾。　　証毕

定理 3 (Lie)　設 $\mathfrak{g}$ 是 C 上的可解 Lie 环，(ρ, V) 是它的表現。則 $e\in V$，$e\neq 0$ 使 e 所架成的 V 之子空間是 $\mathfrak{g}$-不变的，即 $\rho(X)\{e\}\subset\{e\}$ $(X\in\mathfrak{g})$。

証明　從 V 之 $\mathfrak{g}$-不变子空間 $U\neq\{0\}$ 中，选取 $\dim U$ 最小的一个，記做 U。(ρ, V) 在 U 上引出的表現 ρ_U，根据 U 之取法，知道它是旣約的。因此，ρ_U 是完全可約的。从定理 2 知，$\rho_U(\mathfrak{g})$ 和它的中心是一致的。亦即是可換的。因此，由 Schur 的引理❶可以得出 $\dim U=1$。把 U 的任意元素 $(\neq 0)$ 取作 e，就得到定理的証明。　　証毕

注意 1　对于实数体 R 上的可解 Lie 环 $\mathfrak{g}$，当有在 R 上的向量空間作其表現时，此事实未必成立。

注意 2　在 Lie 定理內，以

$$\rho(X)e=\alpha(X)e, \quad \alpha(X)\in C, \quad X\in\mathfrak{g},$$

这里的 α 是在 $\mathfrak{g}$ 上定义且取复数值的函数，也就是 $\mathfrak{g}$ 上的綫性形式。事实上，

$$\alpha(\lambda X+\mu Y)e=\rho(\lambda X+\mu Y)e=\lambda\rho(X)e+\mu\rho(Y)e=(\lambda\cdot\alpha(X)+\mu\cdot\alpha(Y))e.$$

因此，有　$\alpha(\lambda X+\mu Y)=\lambda\cdot\alpha(X)+\mu\cdot\alpha(Y)$　$(\lambda,\mu\in C; X, Y\in\mathfrak{g})$.

系 1　对于 C 上的可解 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之表現 (ρ, V)，如适当地取 V 之基底 $e_1, \cdots, e_n$，則 $\rho(X)$ 之矩陣 $(\alpha_i^j(X))$ 滿足

$$\alpha_i^j(X)=0 \quad (j>i).$$

亦即矩陣采取形式

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & * & & * \\ 0 & 0 & * & \\ \cdots & \cdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & * \end{pmatrix}.$$

---

❶ 参考《代数学》§26。

証明 使 $\rho(X)e_1=\alpha_1(X)e_1$ ($\alpha_1(X)\in C$, $X\in\mathfrak{g}$) 成立的 $e_1\neq 0$ 取定后，对于 $V/\{e_1\}$，利用 Lie 定理选取使 $\rho(X)e_2\equiv\alpha_2(X)e_2 (\bmod e_1)$ ($\alpha_2(X)\in C$, $X\in\mathfrak{g}$) 成立的 e_2，这里的 $e_2\not\equiv 0 (\bmod e_1)$。照此依次进行下去，就得出一系列的 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ (和定理 1 之系 2 同样)。 証毕

3. 綫性映射所引起的特征空間之分解

設 V 是 C 上的向量空間，$n=\dim V$，A 为 V 之綫性映射：$A\in\mathfrak{gl}(V)$。設 I 是 V 之恒等映射，α 为复数，如以

$$V(A, \alpha)=\{x\in V;\ (A-\alpha I)^n x=0\},$$

則 $V(A, \alpha)$ 是 V 之子空間，称为关于 α 的 A 之**特征空間**。对于这特征空間，列举出綫性代数学里熟知的基本性质如下❶：

(1) 当 α 仅仅是 A 的特征值时，$V(A, \alpha)\neq\{0\}$。

(2) 如 A 之不同的特征值是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，則

$$V=V(A, \alpha_1)+\cdots+V(A, \alpha_r) \quad (\text{直和}).$$

(3) $B\in\mathfrak{gl}(V)$ 和 A 可换时，則 $B\cdot V(A, \alpha)\subset V(A, \alpha)$。

(4) A 在 $V(A, \alpha_i)$ 上之特征值只限于 $\alpha_i (i=1, \cdots, r)$。分解(2)称为 V 关于 A 之特征空間分解。

(5) 对于某一自然数 k，如果 $(A-\alpha I)^k x=0$ 成立，則 x 属于 $V(A, \alpha)$。

(6) 如果 A 的对角化是可能的(即对于 V 之适当基底，A 之矩陣化为对角矩陣)，則

$$V(A, \alpha)=\{x\in V;\ (A-\alpha I)x=0\}.$$

4. 冪零 Lie 环之表現及其权

設 $\mathfrak{h}$ 是 C 上的冪零 Lie 环，(ρ, V) 是它的表現。对于 $\mathfrak{h}$ 上定义的复数值函数 λ，我們記 $V(\rho(H), \lambda(H))$ ($H\in\mathfrak{h}$) 全体之共同部分为 V_λ，即

❶ 参照《代数学》§14.15。

$$V_\lambda = \bigcap_{H\in\mathfrak{h}} V(\rho(H),\ \lambda(H)).$$

V_λ 是 V 的子空間。以下要說明 V_λ 是 $\mathfrak{h}$-不变的。这只要能說明，对于任意复数 α, $V(\rho(H),\alpha)$ 是 $\mathfrak{h}$-不变的就可以了(因为 V_λ 是这些子空間之交集)。而要說明这一事实，只要說明对于 $x\in V(\rho(H),\alpha)$, $A\in\mathfrak{h}$，取充分大的自然数 k，能使 $(\rho(H)-\alpha I)^k\rho(A)x=0$ 成立就可以了。首先，让我們証明

$$(\rho(H)-\alpha I)^\nu\rho(A)=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu-i}$$
$$(\nu=1,\ 2,\ \cdots). \tag{22.1}$$

事实上，当 $\nu=1$ 时，由公式 $\rho([H,A])=[\rho(H)-\alpha I,\ \rho(A)]$ 知道

$$(\rho(H)-\alpha I)\rho(A)=\rho(A)(\rho(H)-\alpha I)+\rho(ad(H)A)$$

成立。現在假設 ν 的时候也成立，那么，由上面的公式得

$$\begin{aligned}
&(\rho(H)-\alpha I)^{\nu+1}\rho(A)\\
&=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}(\rho(H)-\alpha I)\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu-i}\\
&=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}\{\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)\\
&\quad+\rho(ad(H)^{i+1}A)\}(\rho(H)-\alpha I)^{\nu-i}\\
&=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu-i+1}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}\rho(ad(H)^{i+1}A)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu-i}\\
&=\sum_{i=1}^{\nu}\left(\binom{\nu}{i}+\binom{\nu}{i-1}\right)\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu+1-i}\\
&\quad+\rho(A)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu+1}+\rho(ad(H)^{\nu+1}A)\\
&=\sum_{i=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{i}\rho(ad(H)^iA)(\rho(H)-\alpha I)^{\nu+1-i},
\end{aligned}$$

这意味着公式在 $\nu+1$ 时也成立。因此，(22.1) 对于任何自然数 ν

是成立的。再以 $\dim V=n$, $\dim \mathfrak{g}=r$, 则 $ad(H)^r=0$; $(\rho(H)-\alpha I)^n x=0$ $(x\in V(\rho(H),\alpha))$, 因此, 从公式 (22.1) 得 $(\rho(H)-\alpha I)^{n+r}\rho(A)x=0$. 这样就說明了 $V(\rho(H),\alpha)$ 是 $\mathfrak{h}$-不变的。

其次, 設 $V_\lambda\neq\{0\}$. 其中 λ 实际是 $\mathfrak{h}$ 上的綫性形式, 而且在 V_λ 内, 适当地取元素 $e\neq 0$ 时, 可以使

$$\rho(H)e=\lambda(H)e \quad (\text{对于各 } H\in\mathfrak{h}). \tag{22.2}$$

事实上, 由 Lie 定理知道, 在 V_λ 内有元素 $e\neq 0$, 对于各 $H\in\mathfrak{h}$, 使 $\rho(H)\{e\}\subset\{e\}$ 成立。这就是說, $\rho(H)e$ 具有 $\alpha_H e$ $(\alpha_H\in C)$ 这样的形式。α_H 构成 $\rho(H)$ 之特征值, e 构成特征向量。但是 $\rho(H)$ 在 V_λ 上除了 $\lambda(H)$ 之外, 沒有其他的特征值. 所以, $\alpha_H=\lambda(H)$. 因此

$$\rho(H)e=\lambda(H)e \quad (H\in\mathfrak{h}).$$

从而推知 $\lambda(H)$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的綫性形式 [§ 22.2 之注意 2]. $V_\lambda\neq\{0\}$ 时, $\mathfrak{h}$ 上的綫性形式 λ 称为 $\mathfrak{h}$ 关于表現 (ρ, V) 之**权** (**weight**)。满足 (22.2) 的向量 $e\in V_\lambda$; $e\neq 0$ 称为关于这个权的**特征向量**。又 V_λ 称为关于权 λ 的**特征空間**。$\dim V_\lambda$ 称为权 λ 的**重复度**。

定理 4 C 上的冪零 Lie 环 $\mathfrak{h}$ 的表現为 (ρ, V), $\mathfrak{h}$ 关于它的权的个数是有限的, 記以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, 则

$$V=V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_p} \quad (\text{直和}).$$

証明 設 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是不同的权, $\varphi=\prod_{1\leq i<j\leq k}(\lambda_i-\lambda_j)$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的多項式 (卽根据 $\mathfrak{h}$ 之基底 $H_1, \cdots, H_r$, 当 $\mathfrak{h}$ 之元素 H 可以写成 $H=\sum\xi^i H_i$ 时, φ 是 $\xi^1, \cdots, \xi^r$ 之多項式), 而且 $\varphi\neq 0$. 因此, 如取 $A\in\mathfrak{h}$ 使 $\varphi(A)\neq 0$, 则 $\lambda_i(A)\neq\lambda_j(A)$ $(1\leq i<j\leq k)$, 从而根据 § 22.3 知

$$V(\rho(A),\lambda_1(A))+\cdots+V(\rho(A),\lambda_k(A))$$

是直和。由于 $V_{\lambda_i}\subset V(\rho(A),\lambda_i(A))$, 因而

$$V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_k}$$

也是直和。由此(从 $\dim V=n<\infty$) 可知,权最多是 n 个。

其次,当 λ 就关于 (ρ, V) 的权之全体依次变动时,試証 $\sum_{\lambda} V_{\lambda}=V$. 关于 $n=\dim V$, 利用归納法去証明。$n=1$ 时是明显的。現在假設直到 $n-1$ 时也是成立的,我們要証在 n 的时候也成立。为此,对以下两种可能情况分别进行討論。

(1) 对于各 $H\in\mathfrak{h}$, $\rho(H)$ 之特征值只有一个的情况。設 $\rho(H)$ 之特征值是 $\varkappa(H)$, 則因 $V=V(\rho(H), \varkappa(H))$ $(H\in\mathfrak{h})$, 而有 $V=V_{\varkappa}$. (这时,权只有一个 $\varkappa$.)

(2) 对于某一个 $H_0\in\mathfrak{h}$, $\rho(H_0)$ 之特征值有二个以上的情况。关于 $\rho(H_0)$ 之特征空間,对 V 进行分解,即 $V=\sum_{i=1}^{\nu} U_i$. 由于 U_i 是 $\mathfrak{h}$-不变的, $\nu\geqslant 2$, $U_i\neq\{0\}$, 所以 $\dim U_i<\dim V$ $(i=1, \cdots, \nu)$. 因此,我們由归納法中的假設,就 $\mathfrak{g}$ 在 U_i 上之表現而論,有 $U_i=\sum_{\lambda}(U_i)_{\lambda}$ (总和是就权之全体进行的)。因此, $V=\sum U_i=\sum_{i,\lambda}(U_i)_{\lambda}$. 再由 $(U_i)_{\lambda}\subset V_{\lambda}$ 就得到 $V=\sum V_{\lambda}$. 　　証毕

定理4之分解称为 V 关于 $\mathfrak{h}$ 和 ρ 之**特征空間分解**。

5. Lie环关于幂零子环的分解

对 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之幂零子环 $\mathfrak{h}\neq\{0\}$, 考虑 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 内的伴随表現。这时,特别把 $\mathfrak{h}$ 之权称做 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的**根** (**root**)。对于它进行如§22.4内所述的特征空間分解(設 $n=\dim\mathfrak{g}$),分解的結果設为

$$\mathfrak{g}=\sum_{\lambda}\mathfrak{g}_{\lambda},\quad \mathfrak{g}_{\lambda}=\{X\in\mathfrak{g};\ (ad(H)-\lambda(H)I)^{n}X=0\ (H\in\mathfrak{g})\}.$$

根 λ 之中必有等于0的。实际上,因为 $\mathfrak{h}$ 是幂零的,故若以 $\dim\mathfrak{h}=r$, 則 $ad(H)^{r}H'=0$ $(H, H'\in\mathfrak{h})$. 因而 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_0$, 所以 $\mathfrak{g}_0\neq\{0\}$. 这就是說0是一个根。

特别,当 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0$ 成立时, $\mathfrak{g}$ 之幂零子环 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 之 **Cartan子环**。

定理5　設 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 关于幂零子环 $\mathfrak{h}$ 的特征空間分解是

$$\mathfrak{g}=\sum_{\alpha}\mathfrak{g}_{\alpha}\quad(\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_0),$$

(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]\subset\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，特別有 $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha]\subset\mathfrak{g}_\alpha$，这里的 $\mathfrak{g}_0$ 是子环；

(2) 設 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 之表現，这种表現限制于 $\mathfrak{h}$ 上，因而导出了 $\mathfrak{h}$ 的表現 (ρ, V)。在它上面进行

$$V=\sum_{\lambda}V_{\lambda}$$

关于 $\mathfrak{h}$ 之特征空間分解，则

$$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda\subset V_{\lambda+\alpha}.$$

(3) 对于根 α 及 β，如有 $\alpha+\beta\neq0$，则对于 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 形式 B，有

$$B(X, Y)=0\ \ (X\in\mathfrak{g}_\alpha, Y\in\mathfrak{g}_\beta).$$

(4) 如果 $[X, \mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0$，则 $X\in\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{g}_0$。

(5) 如果 $H\in\mathfrak{h}$，$H'\in\mathfrak{h}$，则 $B(H, H')=\sum_{\alpha}n_\alpha\cdot\alpha(H)\alpha(H')$。这里的 $n_\alpha=\dim\mathfrak{g}_\alpha$。

証明 (2) 設 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$，$x\in V_\lambda$，和 §22.4 的(22.1)同样处理，则有

$$(\rho(H)-(\lambda+\alpha)(H)I)^{\nu}\rho(X)x$$
$$=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}\rho((ad(H)-\alpha I)^{i}X)(\rho(H)-\lambda(H))^{\nu-i}x$$
$$(\nu=0, 1, 2, \cdots)$$

成立，把 ν 取得充分大，可以使右边等于 0，因而，$\rho(X)x\in V_{\lambda+\alpha}$。

(1) 把 ρ 取作是 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現，则由(2)得出(1)。

(3) 設 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$，$Y\in\mathfrak{g}_\beta$，由(1)得

$$(ad(X)ad(Y))^{N}\mathfrak{g}_\gamma\subset\mathfrak{g}_{\gamma+N(\alpha+\beta)}.$$

如果 $\alpha+\beta\neq0$，则因根之个数是有限的，所以当 ν 取得充分大时，对于某一个根 γ，可以使 $\mathfrak{g}_{\gamma+N(\alpha+\beta)}=\{0\}$。因此，$(ad(X)ad(Y))^{N}\mathfrak{g}=\{0\}$。这意味着 $ad(X)ad(Y)$ 是幂零的，因而有

$$B(X, Y)=\operatorname{Tr}ad(X)ad(Y)=0.$$

(4) 以 $X=\sum_{\alpha} X_{\alpha}$ $(X_{\alpha}\in\mathfrak{g}_{\alpha})$. 如果对于某一个根 $\alpha_0\neq 0$ 有 $X_{\alpha_0}\neq 0$, 則有 $H\in\mathfrak{h}$ 使 $\alpha_0(H)\neq 0$. 由于 $[H, X]=\sum_{\alpha}[H, X_{\alpha}]$, $ad(H)$ 在 $\mathfrak{g}_{\alpha_0}$ 上之特征値只有 $\alpha_0(H)$ 的原故, $ad(H)$ 在 $\mathfrak{g}_{\alpha_0}$ 上的行列式不等于 0. 因此, $[H, X_{\alpha_0}]\neq 0$, 亦卽 $[H, X]\notin\mathfrak{g}_0$. 这和 $[X, \mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0$ 矛盾。所以如有 $\alpha\neq 0$, 則必須 $X_{\alpha}=0$. 因此, $X\in\mathfrak{g}_0$.

(5) $ad(H)$ 之特征値在各 $\mathfrak{g}_{\alpha}$ 上是由 $\alpha(H)$ (n_{α} 重根)等所組成的, 因此, $ad(H)^2$ 之特征値由 $\alpha(H)^2$ (n_{α} 重根)等組成。于是

$$B(H, H)=\mathrm{Tr}\, ad(H)^2=\sum_{\alpha}n_{\alpha}\alpha(H)^2.$$

从此得到

$$\begin{aligned}B(H, H')&=\frac{1}{2}\{B(H+H', H+H')-B(H, H)-B(H', H')\}\\&=\frac{1}{2}\sum n_{\alpha}(\alpha(H+H')^2-\alpha(H)^2-\alpha(H')^2)\\&=\sum_{\alpha}n_{\alpha}\cdot\alpha(H)\alpha(H').\end{aligned}$$

証毕

6. Cartan 子环之存在性及正則元素

取 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之任意基底 $X_1, \cdots, X_n$. $\mathfrak{g}$ 之元素 $X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i X_i$ 的 Killing 多項式記做 $P(t;X)=\det(tI-ad(X))$. 如果以

$$P(t;X)=t^n+\alpha_{n-1}(\xi^1, \cdots, \xi^n)t^{n-1}+\cdots+\alpha_0(\xi^1, \cdots, \xi^n),$$

則 $\alpha_i(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 是关于 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 之 $n-i$ 次多項式。当使 $\alpha_i(\xi^1, \cdots, \xi^n)\neq 0$ (作为 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 之多項式看待) 的最小 i 値記作 l 时, 有

$$P(t;X)=t^n+\alpha_{n-1}(\xi^1, \cdots, \xi^n)t^{n-1}+\cdots+\alpha_l(\xi^1, \cdots, \xi^n)t^l.$$

如果 $\alpha_l(\xi^1, \cdots, \xi^n)\neq 0$, 則在 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現下, $ad(X)$ 关于特征値 0 的特征空間 $\mathfrak{g}(ad(X), 0)$ 的維数等于 l; 如果 $\alpha_l(\xi^1, \cdots,$

$\xi^n)=0$ 則 $\dim \mathfrak{g}(ad(X), 0)>l$。因此，$l$ 由

$$l=\min_{X\in\mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(ad(X), 0)$$

所給定。由于 $X\in\mathfrak{g}(ad(X), 0)$，所以 $l\geqslant 1$。l 称为 $\mathfrak{g}$ 之**秩数**(rank)。当 $l=\dim \mathfrak{g}(ad(A), 0)$ 时，称 A 为 $\mathfrak{g}$ 之**正則元素**(regular element)。

定理 6 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之正則元素为 A，由 A 組成的子环記以 $\mathfrak{h}$，即 $\mathfrak{h}=\{\alpha A;\ \alpha\in C\}$（因此，$\mathfrak{h}$ 是一維的可換环）。設 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之特征空間分解是

$$\mathfrak{g}=\sum_{\alpha}\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_0,$$

則 $\mathfrak{g}_0$ 是冪零子环，而且是 Cartan 子环。

証明 显然，$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}(ad(A), 0)$。設 $\mathfrak{g}_0$ 之基底是 $A_1, \cdots, A_l$（l 是 $\mathfrak{g}$ 之秩数，$A_1=A$）。对于 $\mathfrak{g}_0$ 之元素 $X=\sum_{i=1}^{l}\eta^i A_i$，$ad(X)$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上所导引出的綫性映射之特征多項式設为 $P_\alpha(t;X)$，則

$$P(t;X)=\prod_{\alpha}P_\alpha(t;X).$$

現将 $P_\alpha(0;X)$ 写成 $D_\alpha(X)$，那么，$D_\alpha(X)$ 是 $\eta^1, \cdots, \eta^l$ 的多項式，写成 $D_\alpha(X)=D_\alpha(\eta^1, \cdots, \eta^l)$。如 $\alpha\neq 0$，A 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上不具有 0 这样的特征值，因此，$D_\alpha(A)=D_\alpha(1, 0, \cdots, 0)$ 不等于 0。从而，多項式 $D_\alpha(\eta^1, \cdots, \eta^l)$ $(\alpha\neq 0)$ 不会恒等于 0。因此，如以

$$\varphi(\eta^1, \cdots, \eta^l)=\prod_{\alpha\neq 0}D_\alpha(\eta^1, \cdots, \eta^l),$$

則多項式 $\varphi(\eta^1, \cdots, \eta^l)$ 不恒等于 0。对于那些使 $\varphi(\eta^1, \cdots, \eta^l)\neq 0$ 的任意复数 $\eta^1, \cdots, \eta^l$，作 $X=\sum_{i=1}^{l}\eta^i A_i$，后者对于各 $\alpha\neq 0$ 满足 $D_\alpha(X)\neq 0$。这就是說 $P_\alpha(t;X)$ 不具有 $t=0$ 这样的根。因此，$ad(X)$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha(\alpha\neq 0)$ 上不具有特征值 0，于是 $\mathfrak{g}(ad(X), 0)\subset\mathfrak{g}_0$；又因为 $\dim\mathfrak{g}_0=l$ 是 $\mathfrak{g}$ 的秩数，所以 $\dim\mathfrak{g}(ad(X), 0)=\dim\mathfrak{g}_0$，亦即 $\mathfrak{g}(ad(X), 0)=\mathfrak{g}_0$。从此推得 $P_0(t;X)=t^l$ 成立。这就是說，

$$\text{如果 } \varphi(\eta^1, \cdots, \eta^l) \neq 0, \text{ 則 } P_0(t;X) = t^l. \tag{22.3}$$

在 $P_0(t;X)$ 內，t 之乘冪的系数是关于 $\eta^1, \cdots, \eta^l$ 的多項式，因此，由 (22.3)（利用代数学里熟知的定理）推得，对于所有复数 $\eta^1, \cdots, \eta^l$, $P_0(t;X) = t^l$ 成立。这就意味着，在 $\mathfrak{g}_0$ 的伴随表現下，$\mathfrak{g}_0$ 之象是冪零綫性映射。因此，由 Engel 定理知，$\mathfrak{g}_0$ 是冪零 Lie 环。以下再証 $\mathfrak{g}_0$ 是 Cartan 子环。要說明这桩事实，只要能說明对于 $\mathfrak{g}_0$ 之各元素 X，滿足 $ad(X)^n Y = 0$ 的 Y 属于 $\mathfrak{g}_0$ 就好了（这里的 $n = \dim \mathfrak{g}$）。把 Y 写成 $Y = \sum_\alpha Y_\alpha (Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha)$，則

$$ad(A)^n Y = \sum_\alpha ad(A)^n Y_\alpha = 0.$$

因此，$ad(A)^n Y_\alpha = 0$ 在各个根 α 上是成立的。如 $\alpha \neq 0$，$ad(A)$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的行列式不等于 0，那末，从 $ad(A)^n Y_\alpha = 0$ 就推得 $Y_\alpha = 0$。于是 $Y = Y_0 \in \mathfrak{g}_0$。 証毕

关于复数体 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子环，有如下的主要定理，这里不加証明❶。

定理 7 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的任意 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 必含有某一正則元素 A，使 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(ad(A), 0)$。对于 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Cartan 子环 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$，有 $\mathfrak{g}$ 之自同构对应 θ 存在（即由 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 上的同构对应），使 $\theta(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$。$\theta$ 事实上具有形式

$$\theta = \exp ad(X_1) \cdots \exp ad(X_\nu).$$

这里的 $X_1, \cdots, X_\nu \in \mathfrak{g}$，$ad(X_i)$ 全都是冪零的。

§23 Lie 环的自同构与求导运算子

1. 自同构

所謂复数体 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之自同构，指的是由 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 上的同构映射。$\mathfrak{g}$ 之自同构全体显然組成 $GL(\mathfrak{g})$ 之子群，記为 $A(\mathfrak{g})$。

---

❶ 証明見书末文献表，C. Chevalley[2]，或松島[4]，或[3]。

事实上，$GL(\mathfrak{g})$ 对于 (1, 2) 型的張量空間 $\mathfrak{g}_2^1=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ 起着如下的作用：对于 $t=Y\otimes f\otimes g\in\mathfrak{g}_2^1$ 以及 $X\in GL(\mathfrak{g})$ 規定

$$X\cdot t=X(Y)\otimes{}^tX^{-1}(f)\otimes{}^tX^{-1}(g).$$

由于 $\mathfrak{g}$ 之交換子积是由 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 中去的一种双綫性映射．因此可以把它当做是 $\mathfrak{g}_2^1$ 里的元素（和 §21.8 的例 1, 2 同样地进行），記成 t．那么

$$t(A, B)=[A, B]\quad(A, B\in\mathfrak{g}).$$

从簡单的計算知道，对于 $X\in GL(\mathfrak{g})$，

$$(X\cdot t)(A, B)=X\cdot(t(X^{-1}A, X^{-1}B))=X[X^{-1}A, X^{-1}B]$$

成立。因此，$X\in A(\mathfrak{g})$ 的条件：$[X^{-1}A, X^{-1}B]=X^{-1}[A, B]$ $=X^{-1}(t(A, B))\ (A\in\mathfrak{g}, B\in\mathfrak{g})$ 等价于 $(X\cdot t)(A, B)=t(A, B)$ $(A\in\mathfrak{g}, B\in\mathfrak{g})$．也就是等价于 $X\cdot t=t$．因此，$A(\mathfrak{g})$ 是 t 之固定群。由 §10.2 知道，它是 $GL(\mathfrak{g})$ 之 Lie 子群。称 $A(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 之**自同构群** (automorphism group)。

2. 求导运算子

試求 $\mathfrak{g}$ 之自同构群 $A(\mathfrak{g})$ 的 Lie 环 $\mathfrak{D}$．$\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 之子环。从 §15.2 知道，$D\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 属于 $\mathfrak{D}$ 的条件是

$$\exp tD\in A(\mathfrak{g})\quad(-\infty<t<\infty).$$

这就是說

$$(\exp tD)[A, B]=[\exp tD\cdot A, \exp tD\cdot B]\quad(A, B\in\mathfrak{g}).$$

要这式成立，其必要与充分的条件和 §15.3 的例 3 一样，是

$$D([A, B])=[DA, B]+[A, DB]\quad(A, B\in\mathfrak{g}).\qquad(23.1)$$

满足 (23.1) 的 $D\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 称为 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之**求导运算子**，或簡称为**求导** (derivation)。$\mathfrak{D}$ 称做 $\mathfrak{g}$ 之**求导 Lie 环** (derivation Lie algebra)。

由 $\mathfrak{g}$ 之元素 X，按照

$$D_X(A)=[X, A]\quad(A\in\mathfrak{g}),$$

可作出 $\mathfrak{g}$ 之求导 D_X。事实上，由 $D_X([A, B])=[X, [A, B]]=[[X, A], B]+[A, [X, B]]$ (Jacobi 法則)，卽得 $D_X([A, B])=[D_XA, B]+[A, D_XB]$. 如用伴随表現的記号，可写成 $D_X=ad(X)$. $D_X(X\in\mathfrak{g})$ 这种形式的求导称为 $\mathfrak{g}$ 之**內部求导** (inner derivation)。內部求导之全体記成 $\mathfrak{J}$. 則 $\mathfrak{J}=ad(\mathfrak{g})$. $\mathfrak{J}$ 显然是 $\mathfrak{D}$ 之子空間，而且是 $\mathfrak{D}$ 之理想子环。事实上，如果 $D\in\mathfrak{D}$, $D_X\in\mathfrak{J}$, 則对于 $A\in\mathfrak{g}$, 有

$$
\begin{aligned}
[D, D_X](A)&=(DD_X-D_XD)(A)=D([X, A])-[X, DA]\\
&=[DX, A].
\end{aligned}
$$

亦卽，$[D, ad(X)]=ad(DX)$. 从而得到 $[\mathfrak{D}, \mathfrak{J}]\subset\mathfrak{J}$. 正如 $A(\mathfrak{g})$ 对应于 $\mathfrak{D}$ 一样，我們把对应于 $\mathfrak{J}$ 的 $A(\mathfrak{g})$ 之連通 Lie 子群写做 $I(\mathfrak{g})$，称为 $\mathfrak{g}$ 之**內部自同构群或伴随群**。$I(\mathfrak{g})$ 之元素叫做 $\mathfrak{g}$ 之**內部自同构**。

下面叙述以后要用到的一个求导定理。

定理 1 設 D 是 C 上 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的求导运算子(簡称为求导)，由 D 所发生的 $\mathfrak{g}$ 之特征空間分解設为 $\mathfrak{g}=\sum_{\alpha}\mathfrak{g}(D, \alpha)$，对于各 α，以

$$D_1X=\alpha X \quad (X\in\mathfrak{g}(D, \alpha))$$

来規定 $D_1\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，則 D_1 也是 $\mathfrak{g}$ 之求导。

証明 由 D_1 之定义容易知道，

$$\mathfrak{g}(D, \alpha)=\{X\in\mathfrak{g};\ D_1X=\alpha X\}.$$

如果 $X\in\mathfrak{g}(D, \alpha)$, $Y\in\mathfrak{g}(D, \beta)$，和 § 22.5 定理 5 的(2)之証明一样，可証 $[X, Y]\in\mathfrak{g}(D, \alpha+\beta)$. 从而得到

$$
\begin{aligned}
D_1([X, Y])&=(\alpha+\beta)[X, Y]=[\alpha X, Y]+[X, \beta Y]\\
&=[D_1X, Y]+[X, D_1Y]. \qquad (23.2)
\end{aligned}
$$

由这里就知道，D_1 成为 $\mathfrak{g}$ 之求导。(由于 $\sum_{\alpha}\mathfrak{g}(D, \alpha)=\mathfrak{g}$，对于 $\mathfrak{g}$ 之各 X 与 Y，(23.2) 成立。) 証毕

第4章　半单純 Lie 环的构造

在这章里，首先叙述半单純性之 Cartan 判定条件，其次，利用 Cartan 子环对半单純 Lie 环进行分解，对这种分解的性质，尤其是对根系和根的基本系等的性质加以闡述，为后章介紹分类之理論、表現論之基础等作准备。最后，利用根基本系来說明半单純 Lie 环之单純性的判定条件。

§ 24　Cartan 的判定条件

要判定在复数体 C 上給定的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 是不是半单純的，就要先求出 $\mathfrak{g}$ 之根基 $\mathfrak{R}$，然后再判定 $\mathfrak{R}$ 是否为 0，但这样做不是容易的。下面我們介紹 Cartan 的判定条件，它是利用 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式来进行判定的。

定理 1　C 上之 Lie 环 $\mathfrak{g}$（R 上之 Lie 环也行）成为半单純的必要与充分条件是 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 形式 $B(X, Y)$ 为非退化的(non-degenerated)。也就是說，对于 $\mathfrak{g}$ 之基底 $X_1, \cdots, X_n$，行列式 $\det(B(X_i, X_j))$ 不等于 0（**Cartan 之判定条件**）。

証明　設 Killing 形式 $B(X, Y)$ 是非退化的，这等于說，滿足

$$B(A, X)=0 \quad (\text{对于各 } X\in\mathfrak{g})$$

的 $A\in\mathfrak{g}$ 只限于是 0。如果 $\mathfrak{g}$ 具有不是 0 的根基 $\mathfrak{R}$ 时，則有使

$$\mathfrak{R}\supset\mathfrak{R}'\supset\cdots\supset\mathfrak{R}^{(k-1)}\neq\{0\},\quad \mathfrak{R}^{(k)}=\{0\}$$

成立的自然数 k 存在。以 $\mathfrak{R}^{(k-1)}=\mathfrak{a}$，則 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环，且 $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]=0$. 今任意取 $A\in\mathfrak{a}, X\in\mathfrak{g}$，則对于任何 $Y\in\mathfrak{g}$，$(ad(A)ad(X))^2Y=ad(A)ad(X)[A,[X, Y]]$ 成为 0. 实际上，由于 $ad(X)[A,$

$[X, Y]] \in ad(X)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, 因而有

$$(ad(A)ad(X))^2 Y \in [A, \mathfrak{a}] = \{0\}.$$

因此，$ad(A)ad(X)$ 是冪零的，其所有特征值都是 0. 从而

$$B(A, X) = \mathrm{Tr}\, ad(A)ad(X) = 0 \quad (A \in \mathfrak{a},\ X \in \mathfrak{g}).$$

由于 $B(X, Y)$ 不是退化的，因此 $A=0$，于是 $\mathfrak{a} = \{0\}$. 这样就产生了矛盾。因此，根基 $\mathfrak{R}$ 是 0.

反之，如果 $\mathfrak{R}$ 是 0，由此証明 $B(X, Y)$ 不是退化的。这一証明比較冗長，因此，只把証明的思路加以說明而略去細节。为此，需要导入以下的基本引理。

引理 1　如果在 C 上有有限維的向量空間 V，则当 V 上的綫性 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 具有性质

$$\mathrm{Tr}\, AB = 0 \quad (\text{对于任何 } A, B \in \mathfrak{g})$$

时，$\mathfrak{g}$ 是可解的。(証略❶)

引理 2　設 C 上的 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 有理想子环 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 形式各为 $B(X, Y)$ 与 $B_{\mathfrak{a}}(X, Y)$，则

$$B(X, Y) = B_{\mathfrak{a}}(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{a}).$$

証明　取 $\mathfrak{a}$ 之基底 $X_1, \cdots, X_r$，扩充它使之組成 $\mathfrak{g}$ 的基底 $X_1, \cdots, X_r, \cdots, X_n$. 在这种基底下，設 $ad(X)$，$ad(Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{a})$ 之矩陣形式分別是

$$ad(X)X_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j(X) X_j \text{ 和 } ad(Y)X_i = \sum \alpha_i^j(Y) X_j,$$

则由于　$\alpha_i^j(X) = \alpha_i^j(Y) = 0 (i = 1, \cdots, n; j = r+1, \cdots, n)$，所以

$$B(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i(X)\alpha_i^j(Y) = \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_j^i(X)\alpha_i^j(Y) = B_{\mathfrak{a}}(X, Y).$$

証毕

定理的証明　如 $B(X, Y)$ 不是退化的，以

$$\mathfrak{a} = \{A \in \mathfrak{g};\ B(A, X) = 0\ (\text{对于任意 } X \in \mathfrak{g})\},$$

❶ 参閱书末文献 [2] 之 III。

则 $\mathfrak{a}\neq\{0\}$. $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环。事实上,如 $A\in\mathfrak{a}$, $X\in\mathfrak{g}$, 则对于各 $Y\in\mathfrak{g}$ 有

$$B([A, X], Y)=-B(A, [X, Y])=0.$$

因此, $[A, X]\in\mathfrak{a}$, 亦即 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$. 由引理 2, 若 $A, B\in\mathfrak{a}$, 则有 $B_{\mathfrak{a}}(A, B)=B(A, B)=0$. 从此, 如果把 $\mathfrak{a}$ 之伴随表現記为 ρ, 把 $\mathfrak{a}$ 之中心記为 $\mathfrak{z}$, 则根据引理 1, $\rho(\mathfrak{a})\approx\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ 是可解的, 于是 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之可解理想子环,而 $\mathfrak{g}$ 是半单純 Lie 环。 証毕

定理 2 如果 $\mathfrak{g}$ 是复数体 C 上的半单純 Lie 环,则存在 $\mathfrak{g}$ 之理想子环 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 满足下面的(1)与(2)。

(1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r$ (直和),

(2) 所有的 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 都是非可换的单純 Lie 环。

这样的理想子环 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 除順序外是唯一确定的($\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 称为 $\mathfrak{g}$ 之单純成分)。$\mathfrak{g}$ 和它的导出环是一致的,即 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

証明 首先証明 $\mathfrak{g}$ 之伴随表現是完全可約的。为此, 只要能說明对于 $\mathfrak{g}$ 之任意理想子环 $\mathfrak{a}$, 有使 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ (直和) 成立的 $\mathfrak{g}$ 之另一理想子环 $\mathfrak{b}$ 存在就好了。如以 $\mathfrak{b}=\{X\in\mathfrak{g}; B(X, A)=0$ (对于各 $A\in\mathfrak{a}$)$\}$,则 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环。这是因为当 $Y\in\mathfrak{b}, X\in\mathfrak{g}$ 时,有

$$B([Y, X], A)=B(Y, [X, A])=0 \quad (A\in\mathfrak{a})$$

成立。由于 B 不是退化的,根据綫性方程理論,有

$$\dim\mathfrak{a}+\dim\mathfrak{b}=\dim\mathfrak{g}. \tag{24.1}$$

另一方面,如果以 $\mathfrak{i}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, 则 $X, Y\in\mathfrak{i}$ 时, $B(X, Y)=0$. 因此, 和定理 1 証明之后半部的情形一样, 故知 $\mathfrak{i}$ 是可解理想子环。因而 $\mathfrak{i}=\{0\}$. 从此,由(24.1)可以写成 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ (直和)。

这样說来, 由于伴随表現是完全可約的, 因此, $\mathfrak{g}$ 可由伴随表現之既約不变子空間 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 的直和組成,那就是說,

$$\begin{cases}\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r,\ \mathfrak{g}_i(1\leqslant i\leqslant r)\text{是 }\mathfrak{g}\text{ 之理想子环,}\\ \text{满足 }\mathfrak{g}_i\supsetneqq\mathfrak{a}\supsetneqq\{0\}\text{的 }\mathfrak{g}\text{ 之理想子环 }\mathfrak{a}\text{ 不存在。}\end{cases}$$

从而，有$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$ $(i\neq j)$。此外，$\mathfrak{g}_i$ 是非可换的单純 Lie 环。实际上，$\mathfrak{g}_i$ 之理想子环 $\mathfrak{b}$ 必定是 $\mathfrak{g}$ 之理想子环，因为 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]=[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{b}]+\cdots+[\mathfrak{g}_r, \mathfrak{b}]=[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{b}]\subset\mathfrak{b}$. 因此，$\mathfrak{b}=\mathfrak{g}_i$ 或 $\mathfrak{b}=\{0\}$，于是 $\mathfrak{g}_i$ 是单純的。又由于 $\mathfrak{g}$ 是半单純的，因而 $\mathfrak{g}_i$ 是非可换的。从此推得$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_i$. 于是我們得出

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]=\sum_{i,j=1}^{r}[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]=[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]+\cdots+[\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_r]=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r=\mathfrak{g}.$$

最后，假設有 $\mathfrak{g}$ 之理想子环 $\mathfrak{h}_1,\cdots,\mathfrak{h}_s(\neq 0)$，且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_1+\cdots+\mathfrak{h}_s$ (直和)，如果各 $\mathfrak{h}_i$ 是单純的，我們来說明 $s=r$ 且除順序外，$\mathfrak{h}_1,\cdots,\mathfrak{h}_s$ 和 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_r$ 是一致的。由于

$$\mathfrak{g}_i=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]=[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_i]+\cdots+[\mathfrak{h}_s, \mathfrak{g}_i]\neq\{0\},$$

所以，使$[\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g}_i]\neq\{0\}$ 的 j 一定存在。又由于

$$\{0\}\neq[\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{h}_j\cap\mathfrak{g}_i,$$

所以

$$[\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{h}_j=\mathfrak{g}_i.$$

因此，每一个 $\mathfrak{g}_i$ 都和某一个 $\mathfrak{h}_j$ 是一致的。取适当的順序使

$$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{h}_i \quad (i=1, \cdots, r),$$

則

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r+\mathfrak{h}_{r+1}+\cdots+\mathfrak{h}_s$$

成为直和，所以 $r=s$. 証毕

§25 半单純 Lie 环的 Cartan 子环

1. 求导与内部求导

定理1 复数体 C 上的半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之求导一定是內部求导。

証明 設 D 是 $\mathfrak{g}$ 之求导。由于 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 形式 B 是非退化的，所以对于各 $X\in\mathfrak{g}$，使

$$\mathrm{Tr}(D\cdot ad(X))=B(A, X)$$

成立的 $A\in\mathfrak{g}$ 是唯一存在的。因此，只要能說明 $D=ad(A)$ 就好

了。为此，又只要說明由于 B 之非退化性，对于各 $X, Y\in\mathfrak{g}$ 有 $B(DX, Y)=B(ad(A)X, Y)$ 成立就可以了。由于 $[D, ad(X)]=ad(DX)$ (§23.2)，所以有

$$\begin{aligned}B(DX, Y)&=\mathrm{Tr}\,ad(DX)ad(Y)=\mathrm{Tr}[D, ad(X)]ad(Y)\\&=\mathrm{Tr}\,D[ad(X), ad(Y)]\\&=\mathrm{Tr}\,Dad([X, Y])=B(A, [X, Y])\\&=B([A, X], Y)=B(ad(A)X, Y).\end{aligned}$$

証毕

2. Cartan 子环的性质

設 C 上之半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 关于由 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 所成的特征空間进行分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_\beta+\cdots+\mathfrak{g}_\gamma\quad(\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}).$$

以下假定 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ 以及这种分解是固定的。$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根簡称为根。且設 $n=\dim\mathfrak{g}$，$l=\dim\mathfrak{h}$。

定理2 对于 $\mathfrak{h}$ 之各元素 H，$ad(H)$ 是可对角化的綫性映射。从而，对于 $\mathfrak{g}_\alpha$ 之每一元素 X，有 $[H, X]=\alpha(H)X$。

証明 因每一个 $\mathfrak{g}_\alpha$ 在 $ad(H)$ 下是不变的，所以若把每一 $\mathfrak{g}_\alpha$ 再加以細分，就变成是由 $ad(H)$ 所生的 $\mathfrak{g}$ 之特征空間分解。若对于各 α，都把 $D_1\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 規定为 $D_1(X)=\alpha(H)X(X\in\mathfrak{g}_\alpha)$，則 D_1 就是 $\mathfrak{g}$ 之求导(§23.2)。因此，$D_2=ad(H)-D_1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 之求导。每一个 $\mathfrak{g}_\alpha$ 在 D_2 之下是不变的。因而 D_2，$ad(H)$ 和 D_1 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的特征值都是 $\alpha(H)$。又由于 D_1 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上起着数量倍的作用，所以特征值是 0。从而 D_2 在 $\mathfrak{g}$ 上的特征值全都是 0，亦即 D_2 是冪零綫性映射。从定理1知道，D_2 可以写成 $D_2=ad(A)$，$A\in\mathfrak{g}$，因 $D_2(\mathfrak{g}_0)\subset\mathfrak{g}_0$，而有 $[A, \mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0$，因此，$A\in\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ (§22.5 定理5, (4))。由于 $ad(A)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上之特征值 $\alpha(A)$ 之全部都是 0，所以对于各 $H'\in\mathfrak{h}$，有 $B(A, H')=\sum_\alpha n_\alpha\alpha(A)\alpha(H')=0\,(n_\alpha=\dim\mathfrak{g}_\alpha)$ (§22.5 定理 5, (5))。再者，如果 $\alpha\neq 0$，則有 $B(A, \mathfrak{g}_\alpha)=0$(§22.5 定理 5, (3))，所以

$B(A, \mathfrak{g})=0$. 因此 $A=0$. 从而 $D_2=0$, 亦即 $ad(H)=D_1$. 这就是說,如果 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, 则 $ad(H)X=\alpha(H)X$ 成立。因此,当从各 $\mathfrak{g}_\alpha$ 取基底作为 $\mathfrak{g}$ 之基底时, $ad(H)$ 之矩陣成为对角矩陣。 証毕

定理3 $\mathfrak{h}$ 是可换 Lie 环: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]=\{0\}$.

証明 在定理 2 内以 $\alpha=0$, 则对于 $H\in\mathfrak{h}$, $X\in\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_0$ 有 $ad(H)X=\alpha(H)X=0$. 亦即 $[H, \mathfrak{g}_0]=0$. 由于 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$, 所以 $[H,\mathfrak{h}]=0$. 亦即 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]=\{0\}$. 証毕

3. 根的性质

对于 $H\in\mathfrak{h}$ 以及根 α, $\alpha(H)$ 之实部与虚部分别記作 $\alpha'(H)$ 与 $\alpha''(H)$, 即 $\alpha(H)=\alpha'(H)+i\alpha''(H)$. 在各个 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上,从 $\mathfrak{g}$ 投向 $\mathfrak{g}$ 的綫性映射 D'_H 与 D''_H 分别定义为

$$D'_HX=\alpha'(H)X,\quad D''_HX=\alpha''(H)X\quad (X\in\mathfrak{g}_\alpha),$$

则 $ad(H)=D'_H+iD''_H$. 这里的 D'_H 和 D'_H 是 $\mathfrak{g}$ 之求导。事实上,如果 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y\in\mathfrak{g}_\beta$, 则 $[X, Y]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, 从而得出

$$\begin{aligned}D'_H([X, Y])&=(\alpha'(H)+\beta'(H))\cdot[X, Y]\\&=[\alpha'(H)X, Y]+[X, \beta'(H)Y]\\&=[D'_HX, Y]+[X, D'_HY].\end{aligned}$$

这就是說 D'_H 是 $\mathfrak{g}$ 之求导。同样, D''_H 也是 $\mathfrak{g}$ 之求导。因此,可以写作 $D'_H=ad(H')$, $D''_H=ad(H'')$ $(H'\in\mathfrak{g},\ H''\in\mathfrak{g})$. 事实上, $H'\in\mathfrak{h}$, $H''\in\mathfrak{h}$, 这只要从 $[H', \mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0$, $[H'', \mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0$ 就可以看出。$H=H'+iH''$, H' 与 H'' 分别称为 H 之**实部**与**虚部**。

把使 $ad(H)$ 之特征值全为实数的那些 $H\in\mathfrak{h}$ 之全体所成的集合記作 $\mathfrak{h}_R$❶, $\mathfrak{h}_R$ 显然是 $\mathfrak{h}$ 之子集,而且是实数 R 上的向量空間。这就是說,如果 $H_1, H_2\in\mathfrak{h}_R$, 则对于任意实数 λ, μ 有 $\lambda H_1+\mu H_2\in\mathfrak{h}_R$. 因此,由上述得知 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_R+i\mathfrak{h}_R$. 由于 $\mathfrak{h}_R\cap i\mathfrak{h}_R=\{0\}$

❶ 也就是对于各根 α, 使 $\alpha(H)$ 全为实数的那些 $H\in\mathfrak{h}$ 之全体所成的集合。

是明显的，所以 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_R+i\mathfrak{h}_R$ 是直和。因而，$\mathfrak{h}$ 成为 $\mathfrak{h}_R$ 之复形，而且 $\mathfrak{h}_R$ 在实数体上的任意基底 $A_1, \cdots, A_l$ 构成 $\mathfrak{h}$ 在复数体上的基底。称 $\mathfrak{h}_R$ 为 $\mathfrak{h}$ 之实部。

如果 $A\in\mathfrak{h}_R$，則 $\alpha(A)$ 是实数，所以 $B(A, A)=\sum_\alpha n_\alpha\alpha(A)^2\geqslant 0$（这里的 $n_\alpha=\dim\mathfrak{g}_\alpha$）。这样，如果 $B(A, A)=0$，則各 $\alpha(A)=0$，从而有 $ad(A)=0$（定理 2），于是 $A=0$。这就是說 $B(A, A)$ 是实向量空間 $\mathfrak{h}_R$ 上的正值 2 次形式。因此，如称 $B(X, Y)$ 为 $X\in\mathfrak{h}_R, Y\in\mathfrak{h}_R$ 之内积，則 $\mathfrak{h}_R$ 就成为 l 維的实 Euclid 空間。从此，利用 Schmidt 的直交化方法，可以取 $\mathfrak{h}_R$（在 R 上）的基底 $H_1, \cdots, H_l$，使

$$B(H_i, H_j)=\delta_{ij}\quad(1\leqslant i, j\leqslant l). \tag{25.1}$$

这里的 δ_{ij} 是 Kronecker 記号。正如以上注意到的，这些 $H_1, \cdots, H_l$ 是 $\mathfrak{h}$ 在 C 上的基底。由 (25.1) 知，Killing 形式 B 在 $\mathfrak{h}$ 上也是非退化的。

定理 4 如果 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $B(X, Y)\neq 0$, 則 $[X, Y]=H\in\mathfrak{h}$，而且 $\alpha(H)\neq 0$。（但設 α 是不为 0 的根。）

証明 由 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]\subset\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，得 $H\in\mathfrak{h}$。今取 $\mathfrak{h}$ 之基底 $H_1, \cdots, H_l$ 使 (25.1) 成立。以 $H=\sum_{i=1}^{l}\lambda^i H_i$，則有

$$\begin{aligned}\lambda^i&=B(H, H_i)=B([X, Y], H_i)=B(X, [Y, H_i])\\&=-B(X, [H_i, Y])=\alpha(H_i)B(X, Y).\end{aligned}$$

因而
$$\alpha(H)=\sum_{i=1}^{l}\lambda^i\alpha(H_i)=B(X, Y)\sum_{i=1}^{l}\alpha(H_i)^2.$$

由于 $\alpha\neq 0$，于是 $\sum\alpha(H_i)^2>0$，所以 $\alpha(H)\neq 0$。 証毕

定理 5 对于不是 0 的根 α 来說，$-\alpha$ 也是一个根。因而存在着 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ 和 $E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，使 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})\neq 0$。

証明 如果 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha})=0$，則必有某一个根 β 使 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta)=0$（§22.5，定理 5，(3)）。从此得到 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g})=\{0\}$，这就产生了 $\mathfrak{g}_\alpha=\{0\}$ 的矛盾。因此，$B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha})\neq 0$，亦即适当地选取 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$,

$E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，可以使 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})\neq 0$。于是由于 $\mathfrak{g}_{-\alpha}\neq\{0\}$，$-\alpha$ 也是一个根。　　証毕

定理 6　对于不是 0 的任意的根 α，有

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha=1,\quad \mathfrak{g}_{2\alpha}=\mathfrak{g}_{3\alpha}=\cdots=\{0\}.$$

証明　取 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})\neq 0$。可以用适当的数量倍运算子代替 E_α，使 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})=1$。若以

$$\{X\in\mathfrak{g}_\alpha;\ B(X, E_{-\alpha})=0\}=\mathfrak{g}_\alpha^{(0)},$$

則 $\mathfrak{g}_\alpha=\{E_\alpha\}+\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$（直和）。这里的 $\{E_\alpha\}$ 是由 E_α 所架成的一維子空間。事实上，如果 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$，写 $Y=X-B(X, E_{-\alpha})E_\alpha$，則 $B(Y, E_{-\alpha})=B(X, E_{-\alpha})-B(X, E_{-\alpha})=0$。因此，$Y\in\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$，亦即 $\mathfrak{g}_\alpha=\{E_\alpha\}+\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$。而且明显地有 $\{E_\alpha\}\cap\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}=\{0\}$。現在以

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}+\mathfrak{g}_{2\alpha}+\mathfrak{g}_{3\alpha}+\cdots.$$

这显然是直和（由于根只是有限个，所以分割是有限的）。从 $[E_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]\subset\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ 得

$$[E_\alpha, \mathfrak{M}]\subset\mathfrak{g}_{2\alpha}+\mathfrak{g}_{3\alpha}+\cdots\subset\mathfrak{M}.$$

其次証明 $[E_{-\alpha}, \mathfrak{M}]\subset\mathfrak{M}$。为此首先說明 $[E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha^{(0)}]=\{0\}$。对于 $H\in\mathfrak{h}$ 和 $X\in\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$，有

$$B(H[E_{-\alpha}, X])=B([H, E_{-\alpha}], X)=-\alpha(H)B(E_{-\alpha}, X)=0$$

成立，所以 $[E_{-\alpha}, X]\in\mathfrak{h}$ 满足 $B(\mathfrak{h}, [E_{-\alpha}, X])=0$。因此，$[E_\alpha, X]=0$（由于 B 在 $\mathfrak{h}$ 上是非退化的），亦即 $[E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha^{(0)}]=\{0\}$。下面再說明 $[E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]\subset\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$。事实上，我們知道 $[E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]\subset\mathfrak{g}_\alpha$，而且 $B([E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}], E_{-\alpha})=B(E_{-\alpha}, [E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha])=B([E_{-\alpha}, E_{-\alpha}], \mathfrak{g}_\alpha)=0$，因此，$[E_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]\subset\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$。

有了以上的准备，我們就得到

$$[E_{-\alpha}, \mathfrak{M}]\subset\{0\}+\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}+\mathfrak{g}_{2\alpha}+\mathfrak{g}_{3\alpha}+\cdots=\mathfrak{M}.$$

因此，$\mathfrak{M}$ 在 $ad(E_\alpha)$ 和 $ad(E_{-\alpha})$ 之下是不变的。从这里可以推知：如果写 $H_\alpha=[E_\alpha, E_{-\alpha}]$，則 $\mathfrak{M}$ 在 $ad(H_\alpha)=[ad(E_\alpha), ad(E_{-\alpha})]$ 之

下也是不变的。如将 $ad(H_\alpha)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的 Trace 写成 $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}ad(H_\alpha)$，則由于 $ad(H_\alpha)$ 在 $\mathfrak{g}_\beta$ 上之特征値是 $\beta(H_\alpha)$，于是

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}ad(H_\alpha)=\alpha(H_\alpha)(n_\alpha^0+2\cdot n_{2\alpha}+3\cdot n_{3\alpha}+\cdots).$$

这里 $n_\alpha^0=\dim\mathfrak{g}_\alpha^{(0)}$, $n_{2\alpha}=\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}$, $\cdots$. 另一方面，

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}ad(H_\alpha)=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}[ad(E_\alpha),ad(E_{-\alpha})]=0.$$

又由于 $\alpha(H_\alpha)\neq 0$（定理 4），因而

$$n_\alpha^0=n_{2\alpha}=n_{3\alpha}=\cdots=0.$$

于是，$\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}=\mathfrak{g}_{3\alpha}=\cdots=\{0\}$. 証毕

定理 7 如果 α, β, $\alpha+\beta$ 中每一个都是不为 0 的根，則

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

証明 由于 $\dim\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}=1$，所以对于 $0\neq E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ 和 $0\neq E_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$ 只要能說明 $[E_\alpha,E_\beta]\neq 0$ 就可以了。确定整数 j, k，使

$$\begin{cases}\beta-j\alpha,\ \beta-(j-1)\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\ \beta+k\alpha\ \text{全都是根},\\ \beta-(j+1)\alpha\ \text{和}\ \beta+(k+1)\alpha\ \text{都不是根。}\end{cases}$$

这样的 j, k 一定滿足

$$j\geqslant 0,\ k\geqslant 1.$$

取这样一个 $E_{-\alpha}$: $0\neq E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$. 并以

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{g}_{\beta-j\alpha}+\cdots+\mathfrak{g}_{\beta-\alpha}+\mathfrak{g}_\beta+\mathfrak{g}_{\beta+\alpha}+\cdots+\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha},$$

那么，明显地 $\mathfrak{M}$ 在 $ad(E_\alpha)$ 和 $ad(E_{-\alpha})$ 之下是不变的，和定理 6 之証明同样，如果以 $H_\alpha=[E_\alpha,E_{-\alpha}]$，則

$$0=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}ad(H_\alpha)=\sum_{\nu=-j}^{k}(\beta+\nu\alpha)(H_\alpha). \tag{25.2}$$

因此，

$$\begin{aligned}(j+1+k)\beta(H_\alpha)&=\{(1+\cdots+j)-(1+\cdots+k)\}\alpha(H_\alpha)\\&=\frac{1}{2}(j-k)(j+k+1)\alpha(H_\alpha).\end{aligned}$$

由定理 4, $\alpha(H_\alpha)\neq 0$，所以得到

$$\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=j-k. \tag{25.3}$$

在这里，如果$[E_\alpha, E_\beta]=0$，则

$$\mathfrak{M}_0=\mathfrak{g}_{\beta-j\alpha}+\cdots+\mathfrak{g}_{\beta-\alpha}+\mathfrak{g}_\beta$$

在$ad(E_\alpha)$和$ad(E_{-\alpha})$之下是不变的。和(25.2)同样，得

$$0=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}_0}ad(H_\alpha)=\sum_{\nu=-j}^{0}(\beta+\nu\alpha)(H_\alpha).$$

从此得$2\beta(H_\alpha)=j\alpha(H_\alpha)$. 由这个式子和(25.3)，又得$k=0$. 这就发生了矛盾。因此$[E_\alpha, E_\beta]=0$的假設是不行的，于是

$$[E_\alpha, E_\beta]\neq 0.$$ 証毕

系 設α与β是不为0的任意二根。当$0\neq E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $0\neq E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $H_\alpha=[E_\alpha, E_{-\alpha}]$时，则$-a_{\beta\alpha}=2\beta(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha)$是整数，而且和$E_\alpha$与$E_{-\alpha}$之取法无关。因此，

若$a_{\beta\alpha}\geqslant 0$，则$\beta$, $\beta+\alpha$, $\cdots$, $\beta+a_{\beta\alpha}\cdot\alpha$全都是根。

若$a_{\beta\alpha}<0$，则β, $\beta-\alpha$, $\cdots$, $\beta-(-a_{\beta\alpha})\cdot\alpha=\beta+a_{\beta\alpha}\cdot\alpha$ 全都是根。

特別，$\beta+a_{\beta\alpha}\cdot\alpha$无論何时都是根。

証明 从$k-j=a_{\beta\alpha}\leqslant k$以及$-a_{\beta\alpha}=j-k\leqslant j$（由(25.3)）就可以看出。 証毕

定理 8 如果α, β是不为0的根，且綫性相关，则$\beta=\pm\alpha$.

証明 以$\beta=\xi\alpha(\xi\in C)$，则$2\beta(H_\alpha)=2\xi\alpha(H_\alpha)$. 从定理7之系中使用的記号，知道$2\xi$是整数。再从关系$\alpha=\xi^{-1}\beta$，同样推知$2\xi^{-1}$也是整数。因此，$\xi$应等于$\pm\frac{1}{2}$, ±1、±2. 但由定理6推知$\xi\neq\pm2$. 而且同样地由于ξ^{-1}不能等于±2，所以$\xi=\pm\frac{1}{2}$也不能成立。这样，ξ就只好等于±1，即$\xi=\pm1$. 証毕

定理 9 在所有的根之中，有$l(=\dim\mathfrak{h})$个是綫性无关的。

証明 能說明对于每一个根α，使$\alpha(H)=0$的$H\in\mathfrak{h}$只限于0就好了。实际上，这时$ad(H)=0$（定理2），从而$H=0$. 証毕

4. 和 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式对应的 $\mathfrak{h}$ 之元素

对于 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式 λ，亦即 $\mathfrak{h}$ 之对偶向量空間 $\mathfrak{h}^*$ 之元素 λ，使

$$B(H_\lambda, H)=\lambda(H)\quad(\text{对于各 } H\in\mathfrak{h})$$

成立的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_λ 是唯一存在的。例如説，取满足 §25.3 之 (25.1) 的 $\mathfrak{h}$ 之基底 $H_1, \cdots, H_l$，設 $\lambda(H_i)=\lambda_i(i=1, \cdots, l)$，则 $H_\lambda=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i H_i$。因而，对应 $\lambda\to H_\lambda$ 是由 $\mathfrak{h}^*$ 投向 $\mathfrak{h}$ 上的一对一之綫性映射(在 C 上)。H_λ 称为对应于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 的 $\mathfrak{h}$ 之元素。今后，凡用 H_λ 这样的記号($\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 时)就是表示上述的意义。

例 1　如果 $0\neq E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$0\neq E_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，则对于各 $H\in\mathfrak{h}$ 有

$$B([E_\alpha, E_{-\alpha}], H)=B(E_\alpha,[E_{-\alpha}, H])=\alpha(H)\cdot B(E_\alpha, E_{-\alpha})$$

成立，因此，对应于根 $\alpha(\neq 0)$ 的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_α 由

$$H_\alpha=B(E_\alpha, E_{-\alpha})^{-1}\cdot[E_\alpha, E_{-\alpha}]$$

所給定。特别，当 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})=1$ 时，$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=H_\alpha$；$B(E_\alpha, E_{-\alpha})=-1$ 时，$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=-H_\alpha$。

5. $\mathfrak{h}$ 上的实一次形式

当 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式在 $\mathfrak{h}$ 之实部 $\mathfrak{h}_R$ 上取实数值时，称 λ 为 $\mathfrak{h}$ 上之实一次形式。

例 2　根是实一次形式。实际上，如果 $H\in\mathfrak{h}_R$，则由 $\mathfrak{h}_R$ 之定义(参照 §25.3)，知道对于各个根 α，$\alpha(H)$ 是实数。

$\mathfrak{h}$ 上所有的实一次形式之全体所成的集合写成 $\mathfrak{h}_R^*$，明显地，$\mathfrak{h}_R^*$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 在 R 上的子空間。因为 $\mathfrak{h}_R^*$ 包含所有的根，所以 $\mathfrak{h}_R^*$ 在 R 上至少是 l 維的空間(定理 9)。一方面，明显地有 $\mathfrak{h}_R^*\cap i\mathfrak{h}_R^*=\{0\}$，所以 $\mathfrak{h}_R^*+i\mathfrak{h}_R^*$ 在实数体上至少具有 $2l$ 維。另一方面，由于 $\mathfrak{h}^*\supset\mathfrak{h}_R^*+i\mathfrak{h}_R^*$，$\mathfrak{h}^*$ 在实数体上是 $2l$ 維的，所以 $\mathfrak{h}_R^*$ 在实数体上是 l 維的，且

$$\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}_R^*+i\mathfrak{h}_R^*\ (\text{直和})。$$

因此，$\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}_R^*$ 的复形。$\mathfrak{h}_R^*$ 在 R 上的任意基底是 $\mathfrak{h}^*$ 在 C 上的基底。$\mathfrak{h}_R^*$ 称为 $\mathfrak{h}^*$ 之实部。容易知道，$\mathfrak{h}_R^*$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 在实数体上的对偶向

量空間。

6. $\mathfrak{h}^*$ 之内积

对于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 和 $\mu\in\mathfrak{h}^*$，λ 与 μ 之内积 (λ, μ) 利用和 λ, μ 相对应的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_λ, H_μ 定义如下:

$$(\lambda, \mu)=B(H_\lambda, H_\mu)。$$

从 H_λ, H_μ 之定义，卽得

$$(\lambda, \mu)=\lambda(H_\mu)=\mu(H_\lambda)。$$

(λ, μ) 是在 $\mathfrak{h}^*$ 上的双綫性形式，这是很明显的。

例 3 §25.3 定理 7 之系中提到过的量

$$-a_{\beta\alpha}=\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)},$$

当取 $B(E_\alpha, E_{-\alpha})=-1$ 时，由于 $\beta(H_\alpha)$ 与 $\alpha(H_\alpha)$ 可写成

$$\beta(H_\alpha)=(\beta, \alpha), \alpha(H_\alpha)=(\alpha, \alpha),$$

所以可把它写成

$$-a_{\beta\alpha}=\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

定理 10 $\mathfrak{h}^*$ 之内积在 $\mathfrak{h}^*_R$ 上取实数値，而且取正値。也就是說，如果 $\lambda, \mu\in\mathfrak{h}^*_R$，則 (λ, μ) 是实数，且 $(\lambda, \lambda)\geqslant 0$, $(\lambda, \lambda)=0$ 只限于 $\lambda=0$ 时才成立。

証明 取 $\mathfrak{h}_R$ 之基底 $H_1, \cdots, H_l$，使 $B(H_i, H_j)=\delta_{ij}$ 成立（参照 §25.3）。以 $\lambda(H_i)=\lambda_i$, $\mu(H_i)=\mu_i$，則 λ_i 和 μ_i 都是实数，而且 $H_\lambda=\sum\lambda_i H_i$, $H_\mu=\sum\mu_i H_i$. 所以

$$(\lambda, \mu)=B(H_\lambda, H_\mu)=\sum\lambda_i\mu_i=\text{实数}, (\lambda, \lambda)=\sum\lambda_i^2\geqslant 0,$$

等号只限于 $\lambda=0$ 时才成立。 証毕

因此，$\mathfrak{h}^*_R$ 是实 Euclid 空間。

7. 由 $\mathfrak{h}_R$ 之基底确定的 $\mathfrak{h}^*_R$ 中之綫性順序

在实数体上取定一組 $\mathfrak{h}_R$ 的基底 $H_1, \cdots, H_l$（不一定要满足正規直交条件 $B(H_i, H_j)=\delta_{ij}$）。对于 $\mathfrak{h}^*_R$ 的元素 λ, μ，以 $\lambda(H_i)=\lambda_i$,

$\mu(H_i)=\mu_i(i=1, \cdots, l)$. 如果对于使 $\lambda_j \neq \mu_j$ 成立的 j 之最小值 i，满足 $\lambda_i > \mu_i$，亦即

$$\lambda_1=\mu_1, \cdots, \lambda_{i-1}=\mu_{i-1}, \lambda_i>\mu_i$$

时，我們把它写成 $\lambda>\mu$，且称 λ 大于 μ。当 $\lambda>0$ 时，称 λ 为正，而当 $\lambda<0$ 时，则称 λ 为负[1]。象这样规定的 $\mathfrak{h}_R^*$ 上之順序关系，称为由 $\mathfrak{h}_R$ 之基底 $H_1, \cdots, H_l$ 所定的順序。这样的順序具有如下的性质。

定理 11 (1) 如 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_R^*$，則 $\lambda>\mu$, $\lambda=\mu$, $\lambda<\mu$ 中一定只有一种关系成立。

(2) 如 $\lambda>\mu$, $\mu>\nu$ $(\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{h}_R^*)$，則 $\lambda>\nu$.

(3) 如 $\lambda>\mu$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_R^*)$，則对于任何 $\nu \in \mathfrak{h}_R^*$ 有 $\lambda+\nu>\mu+\nu$ 成立。

(4) 如 $\lambda>\mu$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_R^*)$，$c$ 是正的实数，則 $c\lambda>c\mu$。如 c 是負的实数，則 $c\lambda<c\mu$.

証明 每一条都很显明。 証毕

由于所有的根都是属于 $\mathfrak{h}_R^*$ 的，所以各根之間可以附以順序。

注意 1 应当注意，以上所定的順序是和 $\mathfrak{h}_R^*$ 之基底的取法有关的。和 $H_1, \cdots, H_l$ 成对偶的 $\mathfrak{h}_R^*$ 之基底記作 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ $(\lambda_i(H_j)=\delta_{ij})$ 时，則 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_l>0$.

8. 与一种順序有关的单純根

在 $\mathfrak{h}_R$ 内确定一个基底，关于它在 $\mathfrak{h}_R^*$ 内导入順序。所謂根 α 关于这順序是**单純根**，意指它满足如下的两个条件：

(1) $\alpha>0$,

(2) 使 $\alpha=\beta+\gamma$, $\beta>0$, $\gamma>0$ 成立的根 β 与 γ 不存在。

定理 12 如果 α, β 关于 $\mathfrak{h}_R^*$ 之一定順序是单純根，那末 $(\alpha, \beta) \leqslant 0$，而且 $\alpha-\beta$ 不是根。

---

[1] 所謂 $\lambda>0$，这和有某一个 i 存在使 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=0$, $\lambda_i>0$ 的意义相同。

証明 以 $\gamma=\alpha-\beta$。如果 γ 是根的話，则将引出如下的矛盾：若 $\gamma>0$，则因 $\alpha=\beta+\gamma$，α 被分解为正的根 β 与 γ，这样，α 就不会是单純根。若 $\gamma<0$，则因 $\beta=\alpha+(-\gamma)$，β 被分解为正根 α 与 $-\gamma$，同样要发生矛盾。因此，$\alpha-\beta$ 不会是根。从定理 7 的系知道，整数 $a_{\beta\alpha}=-2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ 不能是負的，也就是說 $a_{\beta\alpha}\geqslant 0$。由于 $(\alpha,\alpha)>0$，所以 $(\beta,\alpha)\leqslant 0$。 証毕

定理 13 与 $\mathfrak{h}_R^*$ 的一种顺序有关的单純根之个数等于 l。这些单純根如記作 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 組成 $\mathfrak{h}_R^*$ 在实数体上的基底。因此，任意的根 α 可以表示为

$$\alpha=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_l\alpha_l \text{（每一个 } m_i \text{ 都是整数）。} \tag{25.4}$$

如 $\alpha>0$，则各 $m_i\geqslant 0$，

如 $\alpha<0$，则各 $m_i\leqslant 0$。

証明 設单純根之全体为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$。試說明任意一根 α 可以写成(25.4)的形式。假定 $\alpha>0$（如 $\alpha<0$，考虑 $-\alpha$ 即可）。由于 α 是非单純的，所以可分解为两个正根之和：$\alpha=\beta+\gamma$，$\beta>0$，$\gamma>0$。如果 β，γ 也是非单純的，那么，它們也可以分解为正根之和，結果 α 总可以成为多个单純根之和。这就是說，α 可以写成(25.4)的形式。所有的 m_i 都是整数，而且都 $\geqslant 0$。

其次試說明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 在实数体上是綫性无关的。如果

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i\alpha_i=0\quad(\xi_i\in R),$$

则可設 $\xi_1\geqslant 0,\cdots,\xi_p\geqslant 0,\ \xi_{p+1}<0,\cdots,\xi_k<0$

（必要时，可改换 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 之順序号碼）。因此，

$$\sum_{i=1}^{p}\xi_i\alpha_i=\sum_{j=p+1}^{k}(-\xi_j)\alpha_j\quad(\text{設 }=\gamma).$$

从而，
$$0\leqslant(\gamma,\gamma)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{k}-\xi_i\xi_j(\alpha_i,\alpha_j).$$

这里由于 $\xi_i\xi_j\leqslant 0$，$(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0$（定理 12），所以右边总和号内的各

項 $\leqslant 0$. 因此, $(\gamma, \gamma)=0$, 即 $\gamma=0$. 再說每一个 $\alpha_i>0$, 如果 $p<k$, 则根据記号 γ 的定义, 势必产生 $\gamma>0$. 这就发生前后矛盾, 因此 $p=k$. 此外, 如 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 中有正数, 则 $\gamma>0$. 所以为了保持 $\gamma=0$, 则 $\xi_1=\cdots=\xi_k=0$. 这就是說 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 在 R 上是綫性无关的。

由証明之前半部知道, 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 所架成的 $\mathfrak{h}_R^*$ 之子空間 $\mathfrak{p}$ 包含所有的根。因此, 从定理 9 推知, $\mathfrak{p}$ 至少是 l 維的。但 $\mathfrak{h}_R^*$ 是 l 維的, 所以 $\mathfrak{p}=\mathfrak{h}_R^*$. 这就是說 $\mathfrak{p}$ 是 l 維的, 因此, $k=l$. 　　証毕

9. 根的基本系

設 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的所有根中的 l 个为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$. 如果它們具有如下的性质, 則称为**根之基本系**(fundamental root system)。

(1) 任意的根 α 可以用 $\alpha=m_1\alpha_1+\cdots+m_l\alpha_l$ ($m_1, \cdots, m_l$ 是整数)的形式表达出来[1]。这里的系数 m_i 是

(2) 或者是 $m_i\geqslant 0 (i=1, \cdots, l)$, 或者是 $m_i\leqslant 0 (i=1, \cdots, l)$, 两者必居其一(**同号性**)。

例 4 根据定理 13, 和 $\mathfrak{h}_R^*$ 的某种順序有关的单純根之全体組成根的基本系。反之, 有

定理 14 設根之基本系为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$, 那么适当地选取 $\mathfrak{h}_R$ 的基底, 可以使根的基本系和与这基底所定的順序有关的单純根之全体一致。

証明 因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 組成 $\mathfrak{h}_R^*$ 之基底, 所以当与此对偶的 $\mathfrak{h}_R$ 之基底取作 $H_1, \cdots, H_l$ 时, 就有 $\alpha_i(H_j)=\delta_{ij} (1\leqslant i, j\leqslant l)$. 容易知道, 和这种基底所定的順序有关的单純根, 就是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$. 　　証毕

注意 2 这样的順序叫做**基本系** $\alpha_1, \cdots \alpha_l$ **所定的順序**。它們有关系: $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_l>0$. 根之基本系并不是唯一的, 例如說, $-\alpha_1, \cdots, -\alpha_l$ 也是一个基本系。

---

[1] 从而, 和定理 13 証明之后半段一样, $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 构成了 $\mathfrak{h}_R^*$ 之基底(当然也是 $\mathfrak{h}^*$ 之基底)。

10. 单純性的判定条件

根的基本系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 称为**可約的**，意思是指 Π 可以分割为两个非空的子集 Π_1 与 Π_2，且使 Π_1 之每一元素和 Π_2 之每一元素成为直交（这时，Π_1 和 Π_2 显然沒有共同元素）。我們說这样的一組 Π_1, Π_2 构成 Π 的一种**直交分解**。当 Π 是非可約时，即 Π 不能实行直交分解时，則称 Π 为**既約的**。

定理 15　复数体 C 上有半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 及其 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 时，設 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根之基本系。那么，$\mathfrak{g}$ 是单純的必要与充分条件，是 Π 为既約的。

略証❶　(1) 如 Π 是可約的，則 Π 有直交分解 Π_1 与 Π_2。設由 $\{E_\alpha;\ 0\neq E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha\in\Pi_i\}$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 之子环記作 $\mathfrak{g}_i(i=1,2)$，那么，$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想子环，且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$（直和），因而，$\mathfrak{g}$ 不是单純的。

(2) 如果 $\mathfrak{g}$ 不是单純的，則 $\mathfrak{g}$ 可以进行直和分解，即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$。这里的 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是不为 0 的 $\mathfrak{g}$ 之理想子环。这时，如以

$$\Pi_i=\{\alpha\in\Pi;\ \mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_i\}\quad(i=1,\ 2),$$

則 Π_1, Π_2 不是空集。Π 之直交分解就这样給定了。因此，Π 是可約的。　　　　証毕

❶ 詳細証明可以参照书末文献 [4]。

第5章　古典的单純 Lie 环

本章将对所謂古典的单純 Lie 环 A_n, B_n, C_n, D_n 进行叙述，作为第 3, 4 两章所述理論的具体而重要的实例。对于前两章内所提到的一些概念，在本章内将给以具体的說明，以明确它們的实际意义。A_n, B_n, C_n, D_n 是在应用上常常遇到的 Lie 群的 Lie 环。

§ 26　A_n 型单純 Lie 环 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ $(n \geqslant 1)$

把 $\mathfrak{sl}(n+1, C) = \{A \in \mathfrak{gl}(n+1, C)\,;\ \mathrm{Tr}\,A = 0\}$ 写成 $\mathfrak{g}$.

1. Killing 形式

因 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(n+1, C)$ 的理想子环，如求得 $\mathfrak{gl}(n+1, C)$ 之 Killing 形式 $B(X, Y)$，則 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ 为（第 4 章, § 24, 引理 2）

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = B(X, Y) \quad (X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}).$$

当 A, $X \in \mathfrak{gl}(n+1, C)$ 时，因 $ad(A)^2 X = [A, [A, X]] = A(AX - XA) - (AX - XA)A = A^2X - 2AXA - XA^2$，所以如要求 $B(A, A) = \mathrm{Tr}\,ad(A)^2$，只要求由 $\mathfrak{gl}(n+1, C)$ 投向 $\mathfrak{gl}(n+1, C)$ 中的綫性映射

$$X \to A^2X, \quad X \to AXA, \quad X \to XA^2$$

之迹(trace)卽可。从簡单的計算推得❶，这些迹分别是 $(n+1)\mathrm{Tr}(A^2)$, $(\mathrm{Tr}\,A)^2$ 和 $(n+1)\mathrm{Tr}(A^2)$。因此，

$$B(A, A) = 2(n+1)\mathrm{Tr}(A^2) - 2(\mathrm{Tr}A)^2 \quad (A \in \mathfrak{gl}(n+1, C)).$$

从而，

---

❶ 例如說，比較 $Y = A^2X$ 两边的成分，則有 $y_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}a_{kl}x_{lj}$，因此映射 $X \to A^2X$ 之迹是 $\sum_{i,j}$ (x_{ij} 的系数) $= \sum_{i,j}\sum_{k} a_{ik}a_{ki} = (n+1)\mathrm{Tr}(A^2)$.

$$B_{\mathfrak{g}}(A, A)=2(n+1)\mathrm{Tr}(A^2) \quad (A\in\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1, C)).$$

于是

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y)=\frac{1}{2}\{B_{\mathfrak{g}}(X+Y, X+Y)-B_{\mathfrak{g}}(X, X)-B_{\mathfrak{g}}(Y, Y)\}$$
$$=2(n+1)\,\mathrm{Tr}\,(XY).$$

从这里可以看出，$B_{\mathfrak{g}}$ 是非退化的。实际上，考虑一个矩陣，其 i 行 j 列的元素是 1，其余的元素全是 0，記之为 E_{ij}. 这时 X 可以写成 $X=\sum x_{ij}E_{ij}$，如果 $B_{\mathfrak{g}}(X, \mathfrak{g})=0$，則

$$x_{qp}=\mathrm{Tr}(XE_{pq})=0 \quad (p\neq q),$$

$$x_{pp}-x_{n+1, n+1}=\mathrm{Tr}\,X(E_{pp}-E_{n+1, n+1})=0 \quad (p=1, \cdots, n).$$

因此，$X=x_{11}I$ (I 是单位矩陣)。因 $\mathrm{Tr}\,X=0$，所以 $x_{11}=0$，亦卽 $X=0$. 根据 Cartan 判定条件，$\mathfrak{g}$ 成为半单純的。

2. Cartan 子环和根

在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 的元素中，成为对角矩陣的那些元素之全体記成 $\mathfrak{h}$，則 $\mathfrak{h}$ 是可換 Lie 环。对于 $H=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i E_{ii}\in\mathfrak{h}\,(\sum\lambda_i=0)$，有

$$ad(H)E_{ij}=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}$$

成立。所以 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根有如下的 $1+n(n+1)$ 个：

$$0,\ \alpha_{ij}\ \ (\alpha_{ij}(H)=\lambda_i-\lambda_j,\ i\neq j).$$

从此，$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的特征空間分解是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\sum_{i\neq j}\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}},$$

而 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$. 因此，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子环。$\mathfrak{g}$ 之秩数为 n.（满足 $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$ 的那些 H 是正則元素。）

3. $\mathfrak{h}$ 的实部

容易知道，$\mathfrak{h}_R$ 是 $\mathfrak{h}$ 之元素中組成实矩陣的那些元素之全体。$B_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上取正值：

$$B_{\mathfrak{g}}(H, H)=2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2 \quad (H=\sum\lambda_i E_{ii},\ \sum\lambda_i=0),$$

4. 根的基本系

設以 $\alpha_{i,i+1}=\alpha_i(i=1, \cdots, n)$（这里 $\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$），則因

$$\alpha_{ij}=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} \quad (i<j \text{ 时}),$$

$$\alpha_{ij}=-(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_{i-1}) \quad (i>j \text{ 时}),$$

所以 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是根的基本系。試求对应于根 α_i 的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_{α_i}. 为此，只要求使

$$B_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha_i}, H)=\alpha_i(H) \quad (H\in\mathfrak{h})$$

成立的 $H_{\alpha_i}\in\mathfrak{h}$ 即可。从簡单的計算得到❶

$$H_{\alpha_i}=\frac{1}{2(n+1)}(E_{ii}-E_{i+1,i+1}) \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

因而 α_i 与 α_j 的内积 $(\alpha_i, \alpha_j)=B_{\mathfrak{g}}=(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j})$ 是可以計算出来的。其結果是

$$(\alpha_i, \alpha_j)=\begin{cases} 0 & (|i-j|\geqslant 2 \text{ 时}), \\ -\dfrac{1}{2(n+1)} & (|i-j|=1 \text{ 时}), \\ \dfrac{1}{n+1} & (i=j \text{ 时})。\end{cases}$$

因此，$\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$不能直交分解，也就是說，$\Pi$ 是既約的。于是，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 是单純的。称 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 是 A_n 型的单純 Lie 环。

§27 B_n 型单純 Lie 环 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ $(n\geqslant 1)$

1. KILLING 形式 $B(X, Y)$

根据和 §26 同样的計算知道（注意到 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 的元素所成之迹是 0），由 $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 投向 $\mathfrak{g}$ 中的綫性映射 $X\to A^2X+XA^2(A\in\mathfrak{g}, X\in\mathfrak{g})$ 之迹是 $2n\,\mathrm{Tr}(A^2)$，綫性映射 $X\to AXA$ 之

❶ 一般，对应于 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式 μ: $\mu(H)=\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i\lambda_i\left(H=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_iE_{ii}, \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=0\right)$的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_μ 是 $H_\mu=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i'E_{ii}$. 但这里的 $\mu_i'=\mu_i-\frac{1}{n+1}(\mu_1+\cdots+\mu_{n+1})$.

迹是 $-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A^2)$. 由于映射 $X \to A^2X + XA^2 - 2AXA$ 之迹是 $B(A, A)$，所以，得到 $B(A, A) = (2n-1)\operatorname{Tr}(A^2)$. 因而，

$$B(X, Y) = (2n-1)\operatorname{Tr} XY \quad (X, Y \in \mathfrak{o}(2n+1, C)).$$

从这里知道，B 是非退化的。事实上，如有 $X \in \mathfrak{g}$ 使 $B(X, \mathfrak{g}) = 0$，则对于各 $Z \in \mathfrak{gl}(n+1, C)$ 有

$$0 = \operatorname{Tr} X(Z - {}^tZ) = \operatorname{Tr}(X - {}^tX)Z.$$

因此，$X = {}^tX$. 另一方面，由于 $X \in \mathfrak{g}$ 而有 $X = -{}^tX$，所以 $X = 0$. B 既然是非退化的，所以 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 是半单純的。

2. 变数变换

为了使得寻找 Cartan 子环时所用的計算簡单化起見，对二次形式 $I(x) = \sum_{i=0}^{2n} x_i^2$ 实施变数变换

$$y_0 = x_0, \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + ix_{n+k}),$$

$$y_k' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k - ix_{n+k}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

则

$$I(x) = y_0^2 + 2(y_1y_1' + y_2y_2' + \cdots + y_ny_n') = K(y) \quad (\text{假設})。$$

那么，如果规定 $2n+1$ 阶的矩陣 K 为

$$K = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ & I_n & 0 \end{array}\right] \quad (I_n \text{ 为 } n \text{ 阶单位矩陣}),$$

由于 $K(y) = I(x)$，如果使用 §15.3 的記号，便有

$$T^{-1}G(K)T = O(2n+1, C), \quad T^{-1}\mathfrak{g}(K)T = \mathfrak{o}(2n+1, C)\text{❶}.$$

但这里的 T 是变数变换的矩陣：

❶ 从而，§27.1 里所假的 Killing 形式之公式照样成立。

$$T=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & \frac{i}{\sqrt{2}}I_n \\ \cline{2-3} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & -\frac{i}{\sqrt{2}}I_n \end{array}\right].$$

从这里，$\mathfrak{g}(K)$ 的形成是可以考虑的。因为

$$\mathfrak{g}(K)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n+1, C);\ {}^tAK+KA=0\},$$

所以 $\mathfrak{g}(K)$ 的所有元素是由

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & a_1\cdots a_n & b_1\cdots b_n \\ \hline \begin{matrix}-b_1\\ \vdots\\ -b_n\end{matrix} & X & Y \\ \hline \begin{matrix}-a_1\\ \vdots\\ -a_n\end{matrix} & Z & -{}^tX \end{array}\right] \quad {}^tY=-Y,\ {}^tZ=-Z \qquad (27.1)$$

这种形式的复矩陣之全体所組成的。

3. Cartan 子环与根

設 $\mathfrak{h}$ 是这样一种矩陣的全体：在 (27.1) 内，X 是对角矩陣，其他元素全为 0。($\mathfrak{h}$ 的元素 $\in\mathfrak{g}(K)_c$) 在 $\mathfrak{h}$ 的元素中，把 X 的对角元素是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的那种元素記成 $H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。$\mathfrak{h}$ 是可换的 Lie 环。

在 (27.1) 中，把 $a_i=1$ 而其他元素全都是 0 的矩陣記成 $E_{-\lambda_i}$；$b_i=1$ 而其他元素全都是 0 的矩陣記成 $E_{+\lambda_i}$；$Y=E_{ik}-E_{ki}$❶，而其他全为 0 的矩陣記成 $E_{\lambda_i+\lambda_k}$ $(i<k)$；$Z=E_{ik}-E_{ki}$，而其他全为 0 的矩陣記成 $E_{-(\lambda_i+\lambda_k)}$ $(i<k)$；$X=E_{ik}$，而其他全为 0 的矩陣 $(i\neq k)$ 記成 $E_{\lambda_i-\lambda_k}$。$\mathfrak{h}$ 和 $E_{\pm\lambda_i}$, $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}$ 是 $\mathfrak{g}(K)$ 的基底，而且

$$[H, E_{\pm\lambda_i}]=\pm\lambda_i E_{\pm\lambda_i} \quad (H=H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)),$$

---

❶ E_{ik} 表示一个 n 阶矩陣，其 (i, k) 元素是 1，其他元素都是 0。

$$[H, E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}] = (\pm\lambda_i\pm\lambda_k)E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}.$$

因此，$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的分解(以 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K)$)是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\sum_i \mathfrak{g}_{+\lambda_i}+\sum_i \mathfrak{g}_{-\lambda_i}+\sum_{i<k}\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_k}+\sum_{i<k}\mathfrak{g}_{-\lambda_i-\lambda_k}+\sum_{i\neq k}\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_k},$$

$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$. 于是 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 之 Cartan 子环。$\mathfrak{h}$ 之实部 $\mathfrak{h}_R$ 是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 全部都是实数的 $H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 之全体。

4. 根的基本系

如果以 $\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2$, $\alpha_2=\lambda_2-\lambda_3$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$, $\alpha_n=\lambda_n$, 则 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 构成根的基本系：

$$\begin{cases}\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_j & (i<j \text{ 时}),\\ \lambda_i-\lambda_j=-(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_i) & (i>j \text{ 时}),\\ \pm\lambda_i=\pm((\lambda_i-\lambda_n)+\lambda_n),\\ \pm(\lambda_i+\lambda_j)=\pm((\lambda_i-\lambda_n)+(\lambda_j-\lambda_n)+2\lambda_n).\end{cases}$$

把 $\mathfrak{h}$ 中对应于 α_i 的元素記作 H_{α_i}, 那么

$$\begin{cases}H_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\dfrac{1}{2(2n-1)}H(0, \cdots, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{-1}, \cdots, 0)\text{❶}(i=1, \cdots, n-1),\\ H_{\lambda_n}=\dfrac{1}{2(2n-1)}H(0, \cdots, 0, 1).\end{cases}$$

因而，内积 (α_i, α_j) 就变成

$$(\alpha_i, \alpha_j)=\begin{cases}0 & (|i-j|\geq 2 \text{ 时}),\\ -\dfrac{1}{2(2n-1)} & (|i-j|=1 \text{ 时}),\end{cases}$$

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n-1} & (i=1, \cdots, n-1 \text{ 时}),\\ \dfrac{1}{2(2n-1)} & (i=n \text{ 时}).\end{cases}$$

因此，Π 是既約的而 $\mathfrak{g}(K)$ 是单純的。$\mathfrak{g}(K)$ 或 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 称为 B_n 型的单純 Lie 环。

---

❶ 这里的 $\overset{i}{1}$ 表示第 i 个元素是 1.——譯者注

§28 D_n 型单純 Lie 环 $\mathfrak{o}(2n, C)$ $(n\geqslant 3)$

1. Killing 形式和变数变换

因为和 §27 差不多完全一样，所以这里只簡单地叙述如下。Killing 形式是

$$B(X, Y)=(2n-2)\operatorname{Tr} XY \quad (X, Y\in \mathfrak{o}(2n, C)).$$

$\mathfrak{o}(2n, C)$ 在 $n\geqslant 2$ 时是半单純的。

以 $K=\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right]$, $T=\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & \frac{i}{\sqrt{2}}I_n \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & -\frac{i}{\sqrt{2}}I_n \end{array}\right]$

作为变数变换，則有

$$T^{-1}G(K)T=O(2n, C), \quad T^{-1}\mathfrak{g}(K)T=\mathfrak{o}(2n, C)$$

成立。如果考虑到 $\mathfrak{g}(K)$，則 $\mathfrak{g}(K)$ 的所有元素是如

$$\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & -{}^tX \end{array}\right), \quad {}^tY=-Y, \ {}^tZ=-Z \quad (X, Y, Z \text{ 都是 } n \text{ 阶矩陣})$$

的复矩陣之全体。

2. Cartan 子环与根

如果和 §27 完全一样地定义 $\mathfrak{h}$, $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}$ 和 $H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，則 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K)$ 的 Cartan 子环，根是 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k (i\neq k)$. $\mathfrak{h}$ 之实部 $\mathfrak{h}_R$ 和 §27 是同样的。

3. 根的基本系

如果以 $\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2$, $\alpha_2=\lambda_2-\lambda_3$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$, $\alpha_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n$, 則 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是根的基本系:

$$\begin{cases} \lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} & (i<j \text{ 时}), \\ \lambda_i-\lambda_j=-(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_{i-1}) & (i>j \text{ 时}), \\ \pm(\lambda_i+\lambda_j)=\pm((\lambda_i-\lambda_{n-1})+(\lambda_j-\lambda_n)+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)) & (i<j \text{ 时}). \end{cases}$$

$\mathfrak{h}$ 内对应于 α_i 的元素 H_{α_i} 成为

$$\begin{cases} H_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\dfrac{1}{2(2n-2)}H(0,\cdots,\overset{i}{1},\overset{i+1}{-1},\cdots,0)\ (i=1,\cdots,n-1), \\ H_{\lambda_{n-1}+\lambda_n}=\dfrac{1}{2(2n-2)}H(0,\cdots,0,1,1). \end{cases}$$

内积 (α_i,α_j) 则为

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases} 0 & (|i-j|\geqslant 2,\ i\leqslant n-1,\ j\leqslant n-1\ \text{时}), \\ \dfrac{-1}{2(2n-2)} & (i=n-2,\ j=n\ \text{时}), \\ \dfrac{-1}{2(2n-2)} & (|i-j|=1,\ i\leqslant n-1,\ j\leqslant n-1\ \text{时}), \\ 0 & (i\neq n-2,\ j=n\ \text{时}), \\ \dfrac{1}{(2n-2)} & (i=j\ \text{时})。 \end{cases}$$

因此，$n=2$ 时，$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 容許直交分解，是可約的。从而，$\mathfrak{g}(K)\approx\mathfrak{o}(4,C)$ 是半单純而非单純的。$\mathfrak{g}(K)$ 可以分解为

$$\mathfrak{g}(K)=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2\quad(\text{理想子环之直和})。$$

这里，$\mathfrak{g}_1=[E_{\lambda_1-\lambda_2},E_{\lambda_2-\lambda_1}]$，$E_{\lambda_1-\lambda_2}$，$E_{\lambda_2-\lambda_1}$ 所架成的子空間，

$\mathfrak{g}_2=[E_{\lambda_1+\lambda_2},E_{-\lambda_1-\lambda_2}]$，$E_{\lambda_1+\lambda_2}$，$E_{-\lambda_1-\lambda_2}$ 所架成的子空間，

$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的每一个都是 $\approx\mathfrak{sl}(2,C)\approx\mathfrak{o}(3,C)$ 的三維单純 Lie 环。(三維单純 Lie 环都和 A_1 型的 Lie 环同构。)

$n\geqslant 3$ 时，Π 不能进行直交分解，是既約的。$\mathfrak{g}(K)\approx\mathfrak{o}(2n,C)$ 成为单純 Lie 环，叫做 D_n 型的单純 Lie 环。

§29　C_n 型单純 Lie 环 $\mathfrak{sp}(n,C)$　$(n\geqslant 1)$

1. Killing 形式

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,C)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n,C);\ {}^tAJ+JA=0\}$. J 是如

$$J=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

这样的 $2n$ 阶矩陣。因而 $\mathfrak{g}$ 的所有元素是具有如下形式的 $2n$ 阶复矩陣的全体：

$$A=\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & -{}^tX \end{array}\right) \quad {}^tY=Y,\ {}^tZ=Z.$$

和 §27 同样地計算，Killing 形式 $B(U, V)$ 成为

$$B(U, V)=(2n+2)\,\mathrm{Tr}\,UV \quad (U, V\in \mathfrak{sp}(n, C)).$$

由此看出，和 §27 一样，B 是非退化的，$\mathfrak{sp}(n, C)$ 是半单純的。

2. Cartan 子环与根

以

$$H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ \hline & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{array}\right], \quad E_{\lambda_i+\lambda_k}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline E_{ik}+E_{ki} & 0 \end{array}\right),$$

$$E_{-\lambda_i-\lambda_k}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{ik}+E_{ki} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad E_{\lambda_i-\lambda_k}=\left(\begin{array}{c|c} E_{ik} & 0 \\ \hline 0 & -E_{ki} \end{array}\right) \ (i\neq k).$$

則 $[H, E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}]=(\pm\lambda_i\pm\lambda_k)E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}$ $(H=H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))$.
設 $H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 之全体是 $\mathfrak{h}$，則 $\mathfrak{h}$ 是可換的，$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之分解是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\sum\mathfrak{g}_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}(\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h})$。$\mathfrak{h}$ 与 $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}$ 架成 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子环。根是

$$0,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k,$$

一共有 $1+n(n+1)+n(n-1)=1+2n^2$ 个。$\mathfrak{h}_R$ 是由所有的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数所成的元素組成的。

3. 根的基本系

以 $\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2$, $\alpha_2=\lambda_2-\lambda_3$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$, $\alpha_n=2\lambda_n$, 則 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 成为根之基本系：

$$\begin{cases}\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} & (i<j\text{ 时}),\\ \lambda_i-\lambda_j=-(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_{i-1}) & (i>j\text{ 时}),\\ \pm(\lambda_i+\lambda_j)=\pm((\lambda_i-\lambda_n)+(\lambda_j-\lambda_n)+2\lambda_n).\end{cases}$$

对应于 α_i 的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_{α_i} 是

$$\begin{cases}H_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\dfrac{1}{4(n+1)}H(0,\cdots,\overset{i}{1},\overset{i+1}{-1},\cdots,0)\ (i=1,2,\cdots,n-1),\\ H_{2\lambda_n}=\dfrac{1}{4(n+1)}H(0,\cdots,0,2).\end{cases}$$

因而，内积 (α_i,α_j) 是这样的：

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & (|i-j|\geqslant 2\text{ 时}),\\ -\dfrac{1}{4(n+1)} & (|i-j|=1,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n-1\text{ 时}),\end{cases}$$

$$(\alpha_{n-1},\alpha_n)=-\frac{1}{2(n+1)},$$

$$(\alpha_i,\alpha_i)=\frac{1}{2(n+1)}\quad(i=1,\cdots,n-1\text{ 时}),$$

$$(\alpha_n,\alpha_n)=\frac{1}{n+1}.$$

从此知道 Π 是既約的，$\mathfrak{sp}(n,C)$ $(n\geqslant 1)$是单純的。$\mathfrak{sp}(n,C)$称为 C_n 型的单純 Lie 环。

第6章　单純 Lie 环的分类

本章将闡述复数体上的任何单純 Lie 环的分类。首先，根据根系来确定半单純 Lie 环的构造。这样，半单純 Lie 环的分类就归結为根系的分类。事实上，根据 van der Waerden 关于根系的分类，已經对 Cartan 的分类理論予以几何化了。近来，Dynkin 更把这項分类归結为根之基本系的分类，把分类理論更加簡化了。以下就是沿着这个方向进行叙述的。在准备中，我們指出 Weyl 的标准基底，以及作为它的应用的致密形的存在与实例。对于实单純 Lie 环，Cartan 也加以分类。其后又发現了各种分类方法，但在此不能一一都接触到，請讀者参考卷末的文献表[6]。

§30　Weyl 的标准基底，根系的变换与自同构

1. 构造常数的性质

复数体 C 上的半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 关于 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 的特征空間分解設为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\neq0}\mathfrak{g}_\alpha.$$

$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之所有根中，其不为 0 的全体所成的集合記为 Δ，Δ 叫做 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的**根系**。由于 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是一維的，所以选出它的基底 E_α，把 $\{E_\alpha;\ \alpha\in\Delta\}$ 与 $\mathfrak{h}$ 之基底合在一起，自然就构成了 $\mathfrak{g}$ 的基底。在这里我們选擇 $\{E_\alpha\}$，使満足

$$B(E_\alpha,\ E_{-\alpha})=-1.$$

由于

$$[H,\ H']=0\quad(H\in\mathfrak{h},\ H'\in\mathfrak{h}),$$

$$[H,\ E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha\quad(H\in\mathfrak{h}),$$

因此，如果知道了 $[E_\alpha,\ E_\beta]\ (\alpha,\ \beta\in\Delta)$，則 $\mathfrak{g}$ 之交换子积当然就

可以完全确定了。又因 $[E_\alpha, E_\beta]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，所以

如果 $\alpha+\beta\neq 0$，$\alpha+\beta\notin\Delta$，则 $[E_\alpha, E_\beta]=0$。

还有，

如果 $\alpha+\beta\neq 0$，$\alpha+\beta\in\Delta$，则写成 $[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$ ($N_{\alpha,\beta}$ 是不为 0 的复数)。最后，如 $\alpha+\beta=0$，则 $\beta=-\alpha$，而且

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=B(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha=-H_\alpha.$$

这里的 B 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式，H_α 是对应于根 α 的 $\mathfrak{h}$ 之元素。为了使記号統一起見，当 $\alpha\in\Delta$，$\beta\in\Delta$，$\alpha+\beta\neq 0$，$\alpha+\beta\notin\Delta$ 时，把 $N_{\alpha,\beta}$ 写作 $N_{\alpha,\beta}=0$。这样一来，$N_{\alpha,\beta}$ 在 $\alpha\in\Delta$，$\beta\in\Delta(\alpha+\beta\neq 0)$ 时就被規定了。

定理 1　(1) $N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}$.

(2) 如果 $\alpha, \beta, \gamma\in\Delta$，$\alpha+\beta+\gamma=0$，则 $N_{\alpha,\beta}=N_{\beta,\gamma}=N_{\gamma,\alpha}$.

(3) 如果 $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\Delta$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 中无論哪两个的和都 $\neq 0$，则 $N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\delta}+N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta}+N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\delta}=0$.

証明　(1) 从 $[E_\alpha, E_\beta]=-[E_\beta, E_\alpha]$ 就可以明白。

(2) 設 ξ, η 是任意的复数，以 $U=\xi E_\alpha+\eta E_\gamma$。从

$$B(U, [U, E_\beta])=B([U, U], E_\beta)=0$$

即得

$$\begin{aligned}0&=B(\xi E_\alpha+\eta E_\gamma, [\xi E_\alpha+\eta E_\gamma, E_\beta])\\&=B(\xi E_\alpha+\eta E_\gamma, \xi N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}+\eta N_{\gamma,\beta}E_{\gamma+\beta})\\&=B(\xi E_\alpha+\eta E_\gamma, \xi N_{\alpha,\beta}E_{-\gamma}+\eta N_{\gamma,\beta}E_{-\alpha})\\&=-\xi\eta N_{\alpha,\beta}-\xi\eta N_{\gamma,\beta}.\end{aligned}$$

因这式对于 ξ, η 是恒等的，所以

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{\gamma,\beta}=N_{\beta,\gamma}.$$

同样可得

$$N_{\beta,\gamma}=N_{\gamma,\alpha}.$$

(3) 已知 $[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]]=[E_\alpha, N_{\beta,\gamma}E_{\beta+\gamma}]=N_{\alpha,\beta+\gamma}N_{\beta,\gamma}\times E_{\alpha+\beta+\gamma}=N_{\alpha,\beta+\gamma}N_{\beta,\gamma}E_{-\delta}$。由于(2)，有 $N_{\alpha,\beta+\gamma}=N_{\delta,\alpha}=-N_{\alpha,\delta}$，所以 $[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]]=-N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta}E_{-\delta}$.

同样也可以計算 $[E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]]$ 及 $[E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]]$。

把这些計算出的結果代入 Jacobi 法則

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]]+[E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]]+[E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]]=0,$$

即得所求的結果。 証毕

定理 2 設 $\alpha, \beta\in\Delta, \alpha+\beta\in\Delta$. 取整数 $j\geqslant 0, k\geqslant 1$ 使

$$\beta-j\alpha, \cdots, \beta-\alpha, \beta, \beta+\alpha, \cdots, \beta+k\alpha \text{ 是根},$$

$$\beta-(j+1)\alpha, \beta+(k+1)\alpha \text{ 不是根};$$

(这时，$\{\beta+\nu\alpha\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$ 称做根 β 之 α-級数。) 則

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=\frac{(j+1)k}{2}(\alpha, \alpha)>0.$$

証明 如果以

$$\beta-j\alpha=\delta, E_\delta=v_0, [E_\alpha, v_0]=v_1, [E_\alpha, v_1]=v_2, \cdots,$$

則 $v_0\neq 0, v_1\neq 0, \cdots, v_{j+k}\neq 0, v_{j+k+1}=0$ (§25, 定理 7)●。

为了証明本定理，首先証明下述引理。

引理 設以 $[E_{-\alpha}, v_i]=\rho_i v_{i-1}(1\leqslant i\leqslant j+k)$ (ρ_i 是复数)，則

$$\rho_i=-\frac{i(j+k+1-i)}{2}(\alpha, \alpha).$$

証明 試先求数列 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{j+k}$ 所满足之递归式。从

$$[E_\alpha, [E_{-\alpha}, v_i]]=\rho_i[E_\alpha, v_{i-1}]=\rho_i v_i \quad (1\leqslant i\leqslant j+k-1)$$

得 $$[[E_\alpha, E_{-\alpha}], v_i]+[E_{-\alpha}, [E_\alpha, v_i]]=\rho_i v_i,$$

亦即 $$-[H_\alpha, v_i]+\rho_{i+1}v_i=\rho_i v_i.$$

另一方面，由于 $v_i\in\mathfrak{g}_{\beta+(i-j)\alpha}$，而有 $[H_\alpha, v_i]=(\beta(H_\alpha)+(i-j)\alpha(H_\alpha))v_i$。由此式和上式比較 v_i 的系数，即得

$$\rho_i=\rho_{i+1}-(\beta, \alpha)-(i-j)(\alpha, \alpha) \quad (1\leqslant i\leqslant j+k-1).$$

从 $[E_{-\alpha}, v_0]=0$，同样可得

$$\rho_1=(\beta, \alpha)-j(\alpha, \alpha).$$

因此，得递归式 $\rho_{i+1}=\rho_i+\rho_1+i(\alpha, \alpha)$。从这递归式得到

● $v_i(0\leqslant i\leqslant j+k)$ 是 $\mathfrak{g}_{\delta+i\alpha}=\mathfrak{g}_{\beta+(i-j)\alpha}$ 之基底。

$$\rho_\nu=\nu\rho_1+\frac{\nu(\nu-1)}{2}(\alpha,\alpha)=\nu(\beta,\alpha)+\frac{\nu(\nu-2j-1)}{2}(\alpha,\alpha).$$

另一方面，由于 $(\beta,\alpha)=\frac{j-k}{2}(\alpha,\alpha)$（§ 25，定理 7，系），所以

$$\rho_\nu=\frac{\nu(\nu-j-k-1)}{2}(\alpha,\alpha).$$

証毕

在这引理内，以 $i=j+1$，則有 $\rho_{j+1}=-\frac{(j+1)k}{2}(\alpha,\alpha)$. 另一方面，$v_j=\xi E_\beta(\xi\neq0)$，因而，$v_{j+1}=[E_\alpha,v_j]=\xi N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$. 从而，

$$[E_{-\alpha},v_{j+1}]=\rho_{j+1}v_j=\rho_{j+1}\xi E_\beta$$

等于 $$[E_{-\alpha},\xi N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}]=\xi N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}E_\beta,$$

于是有 $$\rho_{j+1}=N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}.$$

从这式以及前面有关 ρ_{j+1} 的式子，得

$$-\frac{(j+1)k}{2}(\alpha,\alpha)=N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}.$$

但如果以 $\gamma=-(\alpha+\beta)$，則

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta}=N_{-\alpha,-\gamma}=-N_{-\gamma,-\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta}$$

（定理 1，(1)，(2)）。因此，

$$2N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\beta}=(j+1)k\cdot(\alpha,\alpha).$$

証毕

2. 使根系不变的綫性映射所引出的同构映射

定理 3　設 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 是复数体 C 上的两个半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 分别是它們的 Cartan 子环，$\mathfrak{g}_i$ 关于 $\mathfrak{h}_i$ 的根系設为 $\Delta_i(i=1,2)$. 那么，如 $\dim\mathfrak{h}_1=\dim\mathfrak{h}_2$，$\varphi$ 是由 $\mathfrak{h}_1$ 投向 $\mathfrak{h}_2$ 上的一对一的綫性映射，且满足

$${}^t\varphi(\Delta_2)=\Delta_1\quad({}^t\varphi \text{ 是 } \varphi \text{ 之轉置映射❶})$$

（即使根系不变），則

(1) ${}^t\varphi$ 使内积不变：$({}^t\varphi(\alpha'),{}^t\varphi(\beta'))=(\alpha',\beta')$ $(\alpha',\beta'\in\Delta_2)$,

(2) $B_2(\varphi(H),\varphi(H'))=B_1(H,H')$ $(H,H'\in\mathfrak{h}_1)$ (B_i 是 $\mathfrak{g}_i$

❶ 参照《代数学》I，§ 10.

的 Killing 形式），

(3) 存在从 $\mathfrak{g}_1$ 投向 $\mathfrak{g}_2$ 上的同构映射 $\tilde{\varphi}$，使

$$\tilde{\varphi}(H)=\varphi(H) \quad (H\in\mathfrak{h}_1).$$

証明 (2) 設 $H, H'\in\mathfrak{h}_1$，則有

$$B_1(H, H')=\sum_{\alpha\in\Delta_1}\alpha(H)\alpha(H'),$$

$$B_2(\varphi(H), \varphi(H'))=\sum_{\alpha'\in\Delta_2}\alpha'(\varphi(H))\alpha'(\varphi(H'))$$

(§22，定理5，(5))。但因 $\Delta_1={}^t\varphi(\Delta_2)$，$\alpha'(\varphi(H))=({}^t\varphi\alpha')(H)$，如以 ${}^t\varphi(\alpha')=\alpha(\alpha'\in\Delta_2, \alpha\in\Delta_1)$，

則
$$B_2(\varphi(H), \varphi(H'))=\sum_{\alpha'\in\Delta_2}({}^t\varphi\alpha')(H)\cdot({}^t\varphi\alpha')(H')$$
$$=\sum_{\alpha\in\Delta_1}\alpha(H)\alpha(H')=B_1(H, H').$$

(1) 設 $\alpha'\in\Delta_2$，$\alpha={}^t\varphi(\alpha')$，对应于 α，α' 的 $\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{h}_2$ 之元素分别为 H_α，$H_{\alpha'}$. 試証 $\varphi(H_\alpha)=H_{\alpha'}$. 实际上，对于 $\mathfrak{h}_1$ 之任意元素 H，以 $H^*=\varphi(H)$，則

$$B_2(\varphi(H_\alpha), H^*)=B_1(H_\alpha, H)=\alpha(H)=({}^t\varphi\alpha')(H)=\alpha'(H^*).$$

由于 H^* 表示 $\mathfrak{h}_2$ 之任意元素，所以，$\varphi(H_\alpha)=H_{\alpha'}$. 因此，如果更以 $\beta'\in\Delta_2$，$\beta={}^t\varphi(\beta')$，$\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 中对应于 β 与 β' 的元素設为 H_β 与 $H_{\beta'}$，則

$$(\alpha, \beta)=B_1(H_\alpha, H_\beta)=B_2(H_{\alpha'}, H_{\beta'})=(\alpha', \beta').$$

(3) 对于各 $\alpha\in\Delta_1$ 选擇 $(\mathfrak{g}_1)_\alpha$ 的元素 $E_\alpha\neq 0$，使

$$B_1(E_\alpha, E_{-\alpha})=-1.$$

以
$$[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}(\alpha+\beta\in\Delta_1).$$

这时，对于各 $\alpha'={}^t\varphi^{-1}(\alpha)\in\Delta_2$，只要能选擇 $(\mathfrak{g}_2)_{\alpha'}$ 之元素 $E'_{\alpha'}\neq 0$，使

$$B_2(E'_{\alpha'}, E'_{\beta'})=-1, \tag{30.1}$$

$$[E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}]=N_{\alpha,\beta}E'_{\alpha'+\beta'}(\alpha'+\beta'\in\Delta_2) \tag{30.2}$$

就好了。实际上，这时，$\tilde{\varphi}(H)=\varphi(H)\ (H\in\mathfrak{h})$，$\tilde{\varphi}(E_\alpha)=E'_{\alpha'}$，因

此，如果把綫性变换 $\tilde{\varphi}$ 规定为 $\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$，则很明显 $\tilde{\varphi}$ 是从 $\mathfrak{g}_1$ 投于 $\mathfrak{g}_2$ 上的一对一映射，而且

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}([H,\ E_\alpha]) = \tilde{\varphi}(\alpha(H)E_\alpha) = \alpha(H)E'_{\alpha'} \\ \qquad\qquad = \alpha'(\varphi(H))E'_{\alpha'} = [\varphi(H),\ E'_{\alpha'}] \\ \qquad\qquad = [\tilde{\varphi}(H),\ \tilde{\varphi}(E'_{\alpha'})], \\ \tilde{\varphi}([E_\alpha,\ E_\beta]) = [E'_{\alpha'},\ E'_{\beta'}] \quad (\alpha+\beta\neq 0), \\ \tilde{\varphi}([E_\alpha,\ E_{-\alpha}]) = \tilde{\varphi}(-H_\alpha) = -\tilde{\varphi}(H_\alpha) = -H_{\alpha'} \\ \qquad\qquad = [E'_{\alpha'},\ E'_{-\alpha'}]. \end{cases}$$

因此，$\tilde{\varphi}$ 是同构映射。

为了要說明(30.1)和(30.2)的解 $E'_{\alpha'}\in(\mathfrak{g}_2)_{\alpha'}$ 之存在，首先取 $(\mathfrak{h}_1)_R$ 的一个基底，并且在 Δ_1 里考虑到順序。对于正根 $\rho\in\Delta_1$，設

$$\textstyle\sum_\rho = \{\alpha\in\Delta_1;\ -\rho<\alpha<\rho\},$$

对于 $\alpha\in\sum_\rho$，假設可以选擇 $E'_{\alpha'}\in(\mathfrak{g}_2)_{\alpha'}$ 使

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\textstyle\sum_\rho \text{ 时，(30.1)和(30.2)是成立的。} \tag{30.3}$$

这时，对于比 ρ 次大的正根 σ，有 $\sum_\sigma=\sum_\rho\cup\{\rho,\ -\rho\}$. 对于 $\sum_\sigma$，如能选擇 $E'_{\rho'}$ 与 $E'_{-\rho'}$ 使(30.3)成立，那末利用这种关于順序的归納法就完成了証明。(如果 ρ 是最小的正根，则 $\sum_\rho$ 是空集，(30.3)当然成立。)

当 $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\sum_\rho$ 时，既假定(30.1)和(30.2)是成立的，那么，只要考虑 $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\sum_\sigma$ 中的 $\alpha,\ \beta$ 和 $\alpha+\beta$ 至少有一个 $\notin\sum_\rho$ 就行了。明显地 $\alpha\neq\beta$，因此，可以假定 $\alpha>\beta$.

如果 $\alpha=\rho$，那么，$\beta\neq-\alpha$，因而有 $-\rho<\beta<0$. 这时，以 $\beta_1=-\beta$，$\alpha+\beta=\alpha_1$，则 $\alpha_1,\ \beta_1\in\Delta_1$，$\alpha_1>0$，$\beta_1>0$，$\rho=\alpha_1+\beta_1>0$.

如果 $\beta=-\rho$，则 $0<\alpha<\rho$. 以 $\alpha+\beta=-\beta_1$，$\alpha=\alpha_1$，则 $\alpha_1\in\Delta_1$，$\beta_1\in\Delta_1$，$\alpha_1>0$，$\beta_1>0$，$\alpha_1+\beta_1=\rho$.

如果 $\alpha+\beta=\rho$，则明显地有 $\rho>\alpha>0$，$\rho>\beta>0$.

如果 $\alpha+\beta=-\rho$，则有 $\rho>(-\alpha)>0$，$\rho>(-\beta)>0$.

經过以上的分析知道,$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\sum_\sigma$,但$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta$中至少有一个 $\notin\sum_\rho$,这只有在 ρ 不是单純根的情况下才能发生。因此,ρ是单純根时,我們选擇$E'_{\rho'}\in(\mathfrak{g}_2)_{\rho'}$,$E'_{-\rho'}\in(\mathfrak{g}_2)_{-\rho'}$使

$$B_2(E'_{\rho'},\ E'_{-\rho'})=-1$$

成立,則(30.3)在对$\sum_\sigma$时自然也成立了。

其次,設ρ不是单純根,确定一組$\alpha,\ \beta$,使滿足

$$\alpha+\beta=\rho,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha,\ \beta\in\Delta_1\quad(\text{設 }\alpha>\beta).$$

这时,由于$\alpha,\ \beta\in\sum_\rho$,所以$E'_{\alpha'}$,$E'_{\beta'}$是可以定义的。以$[E'_{\alpha'},\ E'_{\beta'}]=N_{\alpha,\beta}E'_{\rho'}$来規定$E'_{\rho'}$,用$B_2(E'_{\rho'},\ E'_{-\rho'})=-1$来規定$E'_{-\rho'}$。根据这些規定,以下証明(30.3)对于$\sum_\sigma$是成立的。为此,只要說明:

如果　$$\gamma,\ \delta,\ \gamma+\delta\in\sum_\sigma,$$

則　$$[E'_{\gamma'},\ E'_{\delta'}]=N_{\gamma,\delta}E'_{\gamma'+\delta'}$$

是成立的就好了。換言之,卽就$[E'_{\gamma'},\ E'_{\delta'}]=N'_{\gamma',\delta'}E'_{\gamma'+\delta'}$而論,只要能說明$N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$卽可。在这里,我們只要对$\gamma,\ \delta,\ \gamma+\delta$三者中至少有一个$\notin\sum_\rho$的情况加以討論卽可。現在分成下述几个情况来研究,在整个过程中不妨假定$\gamma>\delta$.

(1) $\gamma+\delta=\rho$. 这时$\gamma>0$, $\delta>0$. 如果$\alpha=\gamma,\ \beta=\delta$,則$N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$是明显的。所以假定$\alpha\neq\gamma$. 由于$\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$,$\alpha,\ \beta,\ -\gamma,\ -\delta$中任何二个之和$\neq0$,因此由定理1的(3),有

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\gamma,-\delta}=-N_{\beta,-\gamma}N_{\alpha,-\delta}-N_{-\gamma,\alpha}N_{\beta,-\delta},$$

$$N'_{\alpha',\beta'}N'_{-\gamma',-\delta'}=-N'_{\beta',-\gamma'}N'_{\alpha',-\delta'}-N'_{-\gamma',\alpha'}N'_{\beta',-\delta'}$$

成立。另一方面,由于$\alpha,\ \gamma,\ \alpha-\gamma\in\sum_\rho$,右边的对应項是相等的。例如說$N_{-\gamma,\alpha}=N'_{-\gamma',\alpha'}$等等。因此,

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\gamma,-\delta}=N'_{\alpha',\beta'}N'_{-\gamma',-\delta'}.$$

由于最初的取法,已有$N_{\alpha,\beta}=N'_{\alpha',\beta'}(\neq0)$,所以得到

$$N_{-\gamma,-\delta}=N'_{-\gamma',-\delta'}(\neq0).$$

但由${}^t\varphi(\Delta_2)=\Delta_1$,如$\delta$之$\gamma$-級数为$\{\delta+\nu\gamma\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$,則$\delta'$之$\gamma'$-級

数是 $\{\delta'+\nu\gamma'\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$，于是由定理 2，得

$$N_{\gamma,\delta}N_{-\gamma,-\delta}=\frac{(j+1)k}{2}(\gamma,\gamma)$$

$$=\frac{(j+1)k}{2}(\gamma',\gamma')=N'_{\gamma',\delta'}N'_{-\gamma',-\delta'}.$$

从而得到 $$N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}.$$

(2) $\gamma+\delta=-\rho$。这时 $-\gamma$，$-\delta$ 适合(1)的情况，因此，和上面一样，可得 $N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}$。

(3) $\gamma=\rho$。如果以 $\delta_1=-\delta,\gamma_1=\gamma+\delta$，则如前述那样，$0<\gamma_1<\rho$，$0<\delta_1<\rho$，$\gamma_1+\delta_1=\rho$，因此由 (1) 有 $N_{-\gamma_1,-\delta_1}=N'_{-\gamma'_1,-\delta'_1}$。更从定理 1 的(2)得

$$N_{\gamma,\delta}=N_{\rho,-\delta_1}=N_{-\delta_1,-\gamma_1}=N'_{-\delta'_1,-\gamma'_1}=N'_{\rho',-\delta'_1}=N'_{\gamma',\delta'}.$$

(4) $\delta=-\rho$。这时 $-\gamma$，$-\delta$ 适合(3)的情况，因此 $N_{-\gamma,-\delta}=N'_{-\gamma',-\delta'}$。和情况(1)一样地利用定理 2，就可以得出

$$N_{\gamma,\delta}=N'_{\gamma',\delta'}.$$

証畢

系　設 $\mathfrak{g}$ 为复数体 C 上的半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子环，Δ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根系。那么，如果从 $\mathfrak{h}$ 投射到 $\mathfrak{h}$ 中去的綫性映射 φ 滿足 ${}^t\varphi(\Delta)=\Delta$，則 φ 可以扩充成为 $\mathfrak{g}$ 之自同构映射。

3. Weyl 的标准基底

定理 4　設 $\mathfrak{g}$ 为 C 上之半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子环，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\neq 0}\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的特征空間分解。那么，从各个 $\mathfrak{g}_\alpha$ 选擇出 $E_\alpha\neq 0$，可以使

$$B(E_\alpha,E_{-\alpha})=-1,\ N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,-\beta}.$$

($N_{\alpha,\beta}$ 是由 $[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$ 所規定的。)

証明　在定理 3 内，以 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_2=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}$，$\varphi(H)=-H$，則由于 ${}^t\varphi(\alpha)=-\alpha$，于是 ${}^t\varphi$ 使根系不变。因此，φ 可以扩充成为 $\mathfrak{g}$ 之自同构 $\tilde{\varphi}$。今由各 $\mathfrak{g}_\alpha$ 选出 $F_\alpha\neq 0$ 使 $B(F_\alpha,F_{-\alpha})=-1$。因此，

我們写 $\tilde{\varphi}(F_\alpha)=F'_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$。

如果把 $F'_{-\alpha}$ 写成 $F'_{-\alpha}=\rho_\alpha F_{-\alpha}$，則因 $B(F'_{-\alpha},F'_\alpha)=B(F_\alpha,F_{-\alpha})=-1$，因而有 $\rho_\alpha\rho_{-\alpha}=1$。对于各 α，选擇使 $\mu_\alpha^2=\rho_\alpha$ 的 μ_α，让它满足 $\mu_{-\alpha}=(\mu_\alpha)^{-1}$，那么，如以 $E_\alpha=\frac{1}{\mu_\alpha}F_\alpha$，則 $\{E_\alpha\}$ 为所求。事实上，$B(E_\alpha,E_{-\alpha})=\frac{1}{\mu_\alpha}\frac{1}{\mu_{-\alpha}}B(F_\alpha,F_{-\alpha})=-1$，如果更以 $[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$，且在两边施以运算 $\tilde{\varphi}$（由于 $\tilde{\varphi}(E_\alpha)=\frac{\rho_\alpha}{\mu_\alpha}F_{-\alpha}=\mu_\alpha F_{-\alpha}=\frac{1}{\mu_{-\alpha}}F'_{-\alpha}=E_{-\alpha}$），則得

$$[E_{-\alpha},E_{-\beta}]=N_{\alpha,\beta}E_{-\alpha-\beta}.$$

于是 $N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,-\beta}$。 証毕

由 $\mathfrak{h}$ 的基底 $H_1,\cdots,H_l$ 和各 $\mathfrak{g}_\alpha$ 之基底 E_α 所成的 $\mathfrak{g}$ 之基底 $H_1,\cdots,H_l,E_\alpha(\alpha\in\Delta)$，如

$$H_i\in\mathfrak{h}_R(1\leqslant i\leqslant l),\ B(E_\alpha,E_{-\alpha})=-1,\ N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,-\beta}$$

成立时，这种基底就称做 $\mathfrak{g}$ 之 **Weyl 的标准基底**。从定理 2 知道，在标准基底下，$N_{\alpha,\beta}$ 是实数。这种标准基底之存在是由定理 4 以及 §25.3 保証的。

§31 緻密的实形

定理 1 复数体 C 上之半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 具有如下的实形 $\mathfrak{g}_u$：$\mathfrak{g}_u$ 之 Killing 形式 B_u 取負值。亦即，对于 $\mathfrak{g}_u$ 之各个元素 $X\neq0$，$B_u(X,X)<0$。

証明 取 $\mathfrak{g}$ 之 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{g}$ 分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\neq0}\mathfrak{g}_\alpha$。再取 Weyl 之标准基底 $H_1,\cdots,H_l,E_\alpha(\alpha\neq0)$，以

$$U_\alpha=E_\alpha+E_{-\alpha},\ V_\alpha=i(E_\alpha-E_{-\alpha})\quad(i=\sqrt{-1}).$$

如果把 $iH_1,\cdots,iH_l,U_\alpha,V_\alpha(\alpha\neq0)$ 的实系数之綫性結合式的全体記作 $\mathfrak{g}_u$（这里 $U_{-\alpha}=U_\alpha$，$V_{-\alpha}=-V_\alpha$），那么，由于

$$[iH_k,U_\alpha]=\alpha(H_k)V_\alpha,\ [iH_k,V_\alpha]=-\alpha(H_k)U_\alpha,$$

$$[U_\alpha, V_\alpha]=2iH_\alpha,$$
$$[U_\alpha, V_\beta]=N_{\alpha,\beta}V_{\alpha+\beta}+N_{-\alpha,\beta}V_{\beta-\alpha} \qquad (\alpha+\beta\neq 0),$$
$$[U_\alpha, U_\beta]=N_{\alpha,\beta}U_{\alpha+\beta}+N_{\alpha,-\beta}U_{\alpha-\beta} \qquad (\alpha+\beta\neq 0),$$
$$[V_\alpha, V_\beta]=-N_{\alpha,\beta}U_{\alpha+\beta}+N_{-\alpha,\beta}U_{\beta-\alpha} \qquad (\alpha+\beta\neq 0)$$

成立，而且所有的 $N_{\alpha,\beta}$ 都是实数，所以有 $[\mathfrak{g}_u, \mathfrak{g}_u]\subset\mathfrak{g}_u$。因此，$\mathfrak{g}_u$ 是实数体 R 上之 Lie 环(在一个規定之順序下)。和 $\alpha>0$ 的 α 对应的 U_α, V_α 等与 $H_1, \cdots, H_l$ 显然組成 $\mathfrak{g}$ 在 C 上之基底，因此，它們也組成 $\mathfrak{g}_u$ 在 R 上的基底。于是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_u+i\mathfrak{g}_u, \ \mathfrak{g}_u\cap i\mathfrak{g}_u=\{0\}.$$

因此，$\mathfrak{g}_u$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形。

如果 $X, Y\in\mathfrak{g}_u$，則 $B_u(X, Y)=B(X, Y)$ (由于 $\mathfrak{g}_u$ 之基底也就是 $\mathfrak{g}$ 之基底)。从此容易推知，如果取 H_i 使 $B(H_j, H_k)=\delta_{jk}$ 成立的話，則对于 $\mathfrak{g}_u$ 之元素 $X=\sum_{k=1}^{l}\xi_k H_k+\sum_{\alpha>0}\eta_\alpha U_\alpha+\sum_{\alpha>0}\zeta_\alpha V_\alpha$，有

$$B_u(X, X)=-\sum\xi_k^2-2\sum_{\alpha>0}\eta_\alpha^2-2\sum_{\alpha>0}\zeta_\alpha^2<0 \quad (X\neq 0).$$

因此，B_u 是取負值的。　　　　証毕

注意1　由于 B_u 取負值，所以 $\mathfrak{g}_u$ 之自同构群 $A(\mathfrak{g}_u)$ 当取 $\mathfrak{g}_u$ 之适当基底时，是实直交群 $O(n)$ $(n=\dim\mathfrak{g})$ 的閉子群，因此是致密的。$A(\mathfrak{g}_u)$ 之 Lie 环是由 $\mathfrak{g}_u$ 之求导运算子所成的 Lie 环 $\mathfrak{D}$，因为 $\mathfrak{g}_u$ 是半单純的(B_u 取負值，当然是非退化的)，所以 $\mathfrak{D}=ad(\mathfrak{g}_u)\approx\mathfrak{g}_u$。因此，以 $\mathfrak{g}_u$ 作为 Lie 环的致密 Lie 群 $A(\mathfrak{g}_u)$ 就作出来了。事实上，我們有如下的 Weyl 定理(証略)。

定理2 (Weyl 定理)　实数体上的半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 形式 B 如取負值时，則以 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 环的所有連通 Lie 群都是致密的。

因此，Killing 形式取負值的那些实数体上之半单純 Lie 环称为**致密的**。定理1之 $\mathfrak{g}_u$ 是 $\mathfrak{g}$ 的致密实形的一种。有时称 $\mathfrak{g}_u$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单式限制 (unitary restriction)。一般称致密实形为**致密形** (**compact form**)。

注意 2 复数体 C 上之半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 的致密形"在本质上"可証明只有一种。也就是說，如 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 之致密形，则 $\mathfrak{g}_1 \approx \mathfrak{g}_2$.

例 1 $SL(n,C)$ $\mathfrak{sl}(n,C)$ 之致密形是 $SU(n)$ 之 Lie 环 $\mathfrak{su}(n)$，这桩事实利用 §26 之基底就可以知道。$SU(n)$ 是 $SL(n,C)$ 的致密子群，而且是 $SL(n,C)$ 之极大的致密子群。亦即包含 $SU(n)$ 的 $SL(n,C)$ 之致密子群除 $SU(n)$ 外不存在其他的致密子群。$SL(n,C)$ 作为拓扑空間看待时，它是 $SU(n)$ 和 Euclid 空間之直积，这是可以証明的。事实上，对于任意連通的 Lie 群 G，我們知道有以下的定理。

定理 3 (Cartan–Malcev–Iwasawa) 任意連通 Lie 群 G 含有极大的致密子群 K. K 是 G 的連通 Lie 子群；如果 G 作为拓扑空間看待，則它是 K 和 Euclid 空間的直积。(其实我們已知道如下的事实：G 之閉子集 E 存在，它和 Euclid 空間是拓扑同构的，G 之任意元素 g 可以用 $g=ke$ ($k\in K$, $e\in E$) 唯一地表示出，k 与 e 是 g 之連續函数。) 还有对于 G 的任意两个极大致密子群 K_1 与 K_2，如取适当的 G 内元素 a，則有 $aK_1a^{-1}=K_2$.

注意 3 $GL(n,C)$ 之閉連通 Lie 子群 G，如果对于它的每一元素 $A\in G$ 都满足 ${}^t\bar{A}\in G$ 时，可以証明 $G\cap U(n)$ 是 G 的一个极大致密子群[1]。利用这个子群还可以求 $SL(n, C)$ 的极大致密子群 $SU(n)$.

例 2 $O(n, C)$ $\mathfrak{o}(n, C)$ 的致密形是 $O(n)$ 的 Lie 环 $\mathfrak{o}(n)$. $O(n)$, $SO(n)$ 分别是 $O(n,C)$, $SO(n,C)$ 之极大致密子群。

例 3 $Sp(n, C)$ $\mathfrak{sp}(n, C)$ 之致密形是 $Sp(n)$ 之 Lie 环 $\mathfrak{sp}(n)$. $Sp(n)$ 是 $Sp(n, C)$ 之极大致密子群。

例 4 Lorentz 群 使 $K(x, y)=x_1y_1+\cdots+x_ry_r-x_{r+1}y_{r+1}-\cdots-x_ny_n$ 不变的实綫性变换所成的 Lorentz 群，其极大的致密子群可取作如

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \quad A\in O(r),\ B\in O(n-r)$$

形式的矩陣所成的子群。

---

[1] n 阶复数矩陣 (z_{ik}) 之元素 z_{ik}，其实数部分与虚数部分各为 x_{ik} 与 y_{ik}. 当有关 x_{ik}, y_{ik} 之多項式 $P_1, \cdots, P_N$ 适当地擇取时，使 $P_1=0, \cdots, P_N=0$ 的 $(z_{ik})\in GL(n, C)$ 之全体作为 G，亦即 G (实数部分与虚数部分作为坐标) 是代数的群时，那么就用不着 G 的連通性。

§32 分类的原理

1. 根系的相似与 Lie 环的同构

設 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 是复数体 C 上之半单純 Lie 环; $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ 分別是它們的 Cartan 子环。$\mathfrak{g}_i$ 关于 $\mathfrak{h}_i$ 的根系是 $\Delta_i(i=1, 2)$。Δ_i 如 §25 所讲的是实 Euclid 空間 $(\mathfrak{h}_i)_{R^*}$ 中的有限集合。在这里要討論如何由 Δ_1 与 Δ_2 去判定 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 是否同构。

首先假設 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是同构的。由 $\mathfrak{g}_1$ 投射到 $\mathfrak{g}_2$ 上的同构映射記作 φ, 如果 $\varphi(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_3$, 則因 $\mathfrak{h}_3$ 也是 $\mathfrak{g}_2$ 之 Cartan 子环, 所以必有适当的 $\mathfrak{g}_2$ 之自同构 ψ 存在, 使 $\psi(\mathfrak{h}_3)=\mathfrak{h}_2$ (§22, 定理7)。因此, 如果以 $\psi\circ\varphi$ 代替 φ, 则可以假定 $\varphi(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$. 如 $\alpha\in\Delta_1$, 取 $0\neq E_\alpha\in(\mathfrak{g}_1)_\alpha$, 并在

$$[H, E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha$$

之两边施以运算 φ, 則得

$$[\varphi(H), \varphi(E_\alpha)]=\alpha(H)\varphi(E_\alpha)\ (H\in\mathfrak{h}_1).$$

对应于 α 的 $\mathfrak{h}_2$ 上之一次形式 α' 如果規定为

$$\alpha'(\varphi(H))=\alpha(H)\ (H\in\mathfrak{h}_1),$$

以 $\varphi(E_\alpha)=E'_{\alpha'}$, 則知 $0\neq E'_{\alpha'}\in(\mathfrak{g}_2)_{\alpha'}$, $\alpha'\in\Delta_2$. 当 $\varphi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 在 $\mathfrak{h}_1$ 上所引出的綫性映射記作 $\varphi_0:\mathfrak{h}_1\to\mathfrak{h}_2$ 时, α 与 α' 間的关系由

$$\alpha={}^t\varphi_0(\alpha'),\ \text{亦卽},\ \alpha'={}^t\varphi_0^{-1}(\alpha)$$

所給定。因此, 得到 ${}^t\varphi_0^{-1}(\Delta_1)\subset\Delta_2$. 同样可得 ${}^t\varphi_0(\Delta_2)\subset\Delta_1$, 于是有 ${}^t\varphi_0(\Delta_2)=\Delta_1$. 由 §30 的定理 3 知, ${}^t\varphi_0$ 是从 Euclid 空間 $(\mathfrak{h}_2)_{R^*}$ 投到 $(\mathfrak{h}_1)_{R^*}$ 上的合同变换, Δ_1 和 Δ_2 是合同的。

反之, 如果 Δ_1 和 Δ_2 是合同的, 亦卽由 $(\mathfrak{h}_2)_{R^*}$ 投到 $(\mathfrak{h}_1)_{R^*}$ 上的合同变换 θ 存在, 使 $\theta(\Delta_2)=\Delta_1$, 則 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 之同构甚为显然 (§30, 定理3)。

如上所述, $\mathfrak{g}_1\approx\mathfrak{g}_2$ 和 $\Delta_1\equiv\Delta_2$ (合同) 显然是等价的。

Euclid 空間 $(\mathfrak{h}_i)_{R^*}$ 之度量，亦即内积，是利用 $\mathfrak{g}_i$ 之 Killing 形式 B_i 定义出来的（§25, 6）。在空間 $(\mathfrak{h}_i)_{R^*}$ 内，如果认定只有长度单位是变化的，則 Δ_i 除相似情况外是完全确定的。因此，

$$\mathfrak{g}_1 \approx \mathfrak{g}_2 \text{ 和 } \Delta_1 \backsim \Delta_2 \text{（相似）}$$

是等价的。

2. 由根的基本系构成根系

設 $\mathfrak{g}$ 是复数体 C 上之半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子环，Δ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根系，Π 是根之基本系。由 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 如何决定 Δ，下面将說明这一点。

Δ 之任意元素 α 可以唯一地写成这样的形式：

$$\alpha=\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i.$$

这里，$m_1, \cdots, m_l$ 是具有相同符号的整数。对于自然数 a，以

$$\Delta_a=\left\{\alpha=\sum m_i\alpha_i\in\Delta;\quad 0<\sum_{i=1}^{l} m_i\leqslant a\right\}.$$

对于各 $\alpha\in\Delta$，擇取适当的 a，則 $\alpha\in\Delta_a$ 或 $-\alpha\in\Delta_a$，两者必有其一。因而有 $\Delta_1=\Pi$. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots$ 知道时，則 Δ 也就曉得了。

現在我們要說明：当 Δ_a 已知时，則 Δ_{a+1} 也就确定了。（这样就可以利用归納法，Δ 可由 Π 来决定。）首先要說明，如果 $\gamma\in\Delta_{a+1}$，$\gamma\notin\Delta_a$，則有 $\beta\in\Delta_a$，$\alpha_i\in\Pi$ 存在，使

$$\gamma=\alpha_i+\beta.$$

利用 Π，在根之間引进順序（§25, 9），則 $\gamma>0$. 如果对于各个 i，有 $(\gamma, \alpha_i)\leqslant 0$，則和 §25, 8 的定理 13 同样地知道，$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 和 γ 是綫性无关的，因而产生矛盾。因此，对于某一个 i，有 $(\gamma, \alpha_i)>0$. 于是如以 $\gamma-\alpha_i=\beta$，則 $\beta\in\Delta$（§25.3 之定理 7 的系），明显地 $\beta\in\Delta_a$.

如上所述，要曉得 Δ_{a+1}，只要在具有形式 $\alpha_i+\beta(\alpha_i\in\Pi,$

$\beta\in\Delta_a$) 的元素中，能判定哪些是属于 Δ 的就好了。設 $\beta\in\Delta_a$，$\alpha_i\in\Pi$，則在 β 之 α_i-級数 $\{\beta+\nu\alpha\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$ 中，$\nu=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ -1$ 的这一部分是知道的(因为假定 Δ_a 是知道的)。这样，j 就可以确定了。另一方面，由于 $2(\beta,\ \alpha_i)=(j-k)(\alpha_i,\ \alpha_i)$，如果 j 确定了，則 k 也就确定了。如果 $k\geqslant1$，則 $\beta+\alpha_i\in\Delta$；如果 $k=0$，則 $\beta+\alpha_i\notin\Delta$. 因此，$\beta+\alpha_i$ 是否属于 Δ_{a+1}，可以由 k 是否满足 $k\geqslant1$ 来判定。

例 1　試从 $\Delta_1=\Pi$ 构成 Δ_2. 設 $\alpha_p,\ \alpha_q\in\Pi$，則因 $\alpha_p-\alpha_q$ 不是根 (§25.8)，所以上述的 $j=0$，而 k 由 $2(\alpha_p,\alpha_q)=-k(\alpha_p,\alpha_q)$ 决定出。于是，得到这样的結論：

$$\begin{cases}\text{如 } (\alpha_p,\ \alpha_q)=0,\ \text{則 } \alpha_p+\alpha_q \text{ 不是根},\\ \text{如 } (\alpha_p,\ \alpha_q)<0,\ \text{則 } \alpha_p+\alpha_q \text{ 是根。}\end{cases}$$

如上所述，由 Π 就可决定 Δ. 因此，对于复数体 C 上的两个半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$，如根之基本系 Π_1 和 Π_2 是相似的，則根系 Δ_1 和 Δ_2 也是相似的。从而，由 §32.1 知道，$\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是同构的。

反之，如果 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是同构的，則可以証明 Π_1 与 Π_2 为相似的。这里略去証明❶。于是有

定理 1　要使 $\mathfrak{g}_1\approx\mathfrak{g}_2$，則其必要与充分的条件是 $\Pi_1\backsim\Pi_2$ (相似)。

§33　Euclid 空間內向量的可容系

1. 定义

設 $\mathfrak{g}$ 是 C 上阶数为 l 的半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子环，Π 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根之基本系，則 $\Pi=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$ 是 l 維的实 Euclid 空間 $\mathfrak{h}_{R^*}$ 中的 l 个向量之集，而且具有如下的性質：

(1) $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l$ 綫性无关，

❶ 参照第 7 章，§34.1。

(2) $a_{ij}=-\dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ $(1\leqslant i, j\leqslant l)$ 是整数，而且当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}\geqslant 0$。

如果 $\mathfrak{g}$ 是单純的，則更有

(3) Π 是旣約的，亦即，Π 不容許直交分解。

一般，当 l 維的实 Euclid 空間 R^l 之元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 滿足条件 (1)，(2) 时，就称它們为 l 維的**可容系** (admissible system)。如果可容系同时又滿足(3)时，則称之为**旣約可容系**。

2．属于可容系的图形

以下試求由 l 維可容系 Π 的向量 α_i, α_j 所成的交角 θ。由条件(1)，(2)知

$$90^\circ\leqslant\theta\leqslant 180^\circ.$$

試考慮 $\theta\neq 90^\circ$ 的情况。因为 $\cos\theta=\dfrac{(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i|\cdot|\alpha_j|}<0$，所以 $a_{ij}=-2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$ 是正整数[1]。因此，$a_{ij}a_{ji}=4\cos^2\theta<4$；反之有 $4\cos^2\theta=1, 2, 3$. 于是

$$\theta=120^\circ, 135^\circ, 150^\circ.$$

这时，
$$|\alpha_i|^2 : |\alpha_j|^2=a_{ji} : a_{ij}.$$

因而我們得到下表(为了簡单起見，設 $|\alpha_i|\geqslant|\alpha_j|$)。

$a_{ij}a_{ji}$	a_{ij}	a_{ji}	θ	$\|\alpha_i\|^2:\|\alpha_j\|^2$
1	1	1	120°	1
2	1	2	135°	2
3	1	3	150°	3

因此，α_i 和 α_j 所成的交角必为 90°, 120°, 135°, 150° 中的一种。此外，如果交角不是 90°，則当知道向量长度之平方比 $|\alpha_i|^2 : |\alpha_j|^2$ 时，即可判定其相交的角度。

[1] (a_{ij}) 称为 Π 之 Cartan 整数。

对于 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 中的各 α_i，使之和平面上的一点对应(这个点仍記作 α_i)，这样就在平面上得到 l 个点。設 α_i 和 α_j 所成的交角为 θ，且 $|\alpha_i|\geqslant|\alpha_j|$，那么，各点之間按照如下的规則用綫段連結起来:

(a) 如 $\theta=120°$　α_i ○———○ α_j

(b) 如 $\theta=135°$　α_i ○═══⇒○ α_j

(c) 如 $\theta=150°$　α_i ○≡≡≡⇒○ α_j

(d) 如 $\theta=90°$　α_i 与 α_j 間沒有綫段連結。

这样作的話，对于 Π，就有平面上的图形(由 l 个点及其相互間的連結綫段所成的)和它对应，这个图形称为**对应于 Π 的图形**。显然，Π 不容許直交分解的事实和图形是連通的(即从任意一点出发，通过連結綫段可以到达其他任意一点)的事实是等价的。

如有 l 維的既約可容系 Π_1 和 Π_2，那么当 $\Pi_1\backsim\Pi_2$ 时，和它們相对应的图形是一致的。反之，如果 Π_1 和 Π_2 的图形一致时，则容易知道 $\Pi_1\backsim\Pi_2$。

其次，試求对应于 A_n, B_n, C_n, D_n 型的各单純 Lie 环的根之基本系 Π 的图形。在 § 26～§ 29 里对 (α_i, α_j) 已作了計算，因此我們得出下面一些图形。

A_n　α_1 ○——○ α_2 ——○- - - - - -○ α_{n-1} ——○ α_n　$(n\geqslant 1)$

B_n　α_1 ○——○ α_2 ——○- - - - - -○ α_{n-1} ═══⇒○ α_n　$(n\geqslant 1)$

C_n　α_1 ○——○ α_2 ——○- - - - - -○ α_{n-1} ⇐═══○ α_n　$(n\geqslant 1)$

D_n　α_1 ○——○ α_2 ——○- - - -○ α_{n-3} ——○ α_{n-2} ——○ α_n　$(n\geqslant 3)$；α_{n-2} ——○ α_{n-1}

注意 1　在上图里 $A_1=B_1=C_1$, $B_2=C_2$, $D_3=A_3$. 因此，得到

$$\mathfrak{sl}(2, C)\approx\mathfrak{o}(3, C)\approx\mathfrak{sp}(1, C),$$

$$\mathfrak{o}(5, C) \approx \mathfrak{sp}(2, C),$$
$$\mathfrak{o}(6, C) \approx \mathfrak{sl}(4, C).$$

3. 既約可容系图形的部分图形

設 l 維既約可容系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 的图形为 L。連結 L 之頂点 α_i, α_j 的綫段数目設为 $r_{ij}(=r_{ji})$。显然 $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 3$。$\alpha_i$ 与 α_j 所成的交角 θ 从 § 33.2 可以推得，即

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{r_{ij}}}{2}.$$

如果 α_i 方向的单位向量为 γ_i，那么，$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$。对于实数 $c_1, \cdots, c_l$，以 $\gamma = \sum_{i=1}^{l} c_i \gamma_i$，則有

$$(\gamma, \gamma) = \sum_{i=1}^{l} c_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} c_i c_j \sqrt{r_{ij}} \geqslant 0. \qquad (33.1)$$

如果 $(c_1, \cdots, c_l) \neq (0, \cdots, 0)$，則 (33.1) 的不等号成立。

$$\sum c_i^2 - \sum_{i<j} c_i c_j \sqrt{r_{ij}} = f_L(c)$$

称为属于 L 的正値二次形式。

取 L 的一部分頂点，例如說 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，頂点 $\alpha_i, \alpha_j (1 \leqslant i, j \leqslant m)$ 間用 $r'_{ij}(\leqslant r_{ij})$ 根綫段連結起来（当 $|\alpha_i| > |\alpha_j|$ 时，矢向是从 α_i 指向 α_j），就得出一个图形 L'。L' 叫做 L **之部分图形**。对于这个 L'，可作 $c_1, \cdots, c_m$ 的二次形式

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} c_i c_j \sqrt{r'_{ij}} = f_{L'}(c_1, \cdots, c_m).$$

这形式称为属于部分图形 L' 的二次形式。

如果 $c_1, \cdots, c_m$ 全都 $\geqslant 0$ 或全都 $\leqslant 0$，則由于 $\sqrt{r_{ij}} \geqslant \sqrt{r'_{ij}}$ 而有

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} c_i c_j \sqrt{r'_{ij}} \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} c_i c_j \sqrt{r_{ij}},$$

因此，

$$f_L(c_1, \cdots, c_m, 0, \cdots, 0) \leqslant f_{L'}(c_1, \cdots, c_m). \qquad (33.2)$$

从这里,我們得到下面的引理。

引理 1 对于满足

$$c_1 \geqslant 0, \cdots, c_m \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} c_i^2 > 0$$

的任意实数 $c_1, \cdots, c_m$, 有 $f_{L'}(c_1, \cdots, c_m) > 0$.

利用这一引理,我們可以驗証图形 L 不会具有如下情形的部分图形 L'. (由于矢向无論朝着哪一个方向都可以,因此把它省略掉。)

[1] 

实际上,頂点从左算起,設为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则

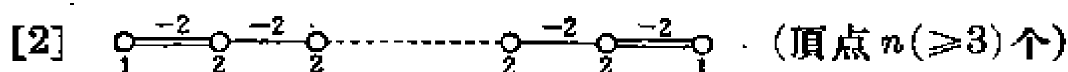
$$f_{L'}(c_1, c_2, c_3) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - \sqrt{3}\, c_1 c_2 - c_2 c_3,$$

当 $c_1 = \sqrt{3}, c_2 = 2, c_3 = 1$ 时, $f_{L'} = 0$,

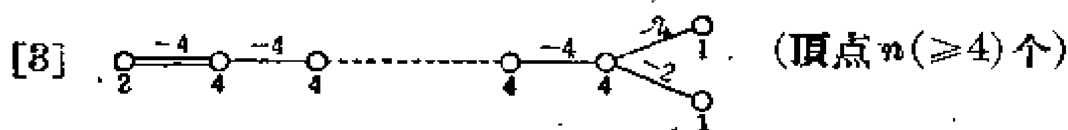
这違反引理 1. 在[1]之图中, 頂点 α_i 下所注的数字是使 $f_{L'} = 0$ 的相应的 c_i^2, 例如在頂点 α_1 下面注以 $c_1^2 = 3$; 同样, 在綫段 $\alpha_i\alpha_j$ 的上面注以和 $-c_i c_j \sqrt{r'_{ij}}$ 相应的数字, 例如在綫段 $\alpha_1\alpha_2$ 上面, 注以

$$-c_i c_j \sqrt{r'_{ij}} = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = -6.$$

以下的图形均仿此。

[2] 

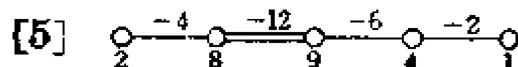
(頂点 $n(\geqslant 3)$ 个)

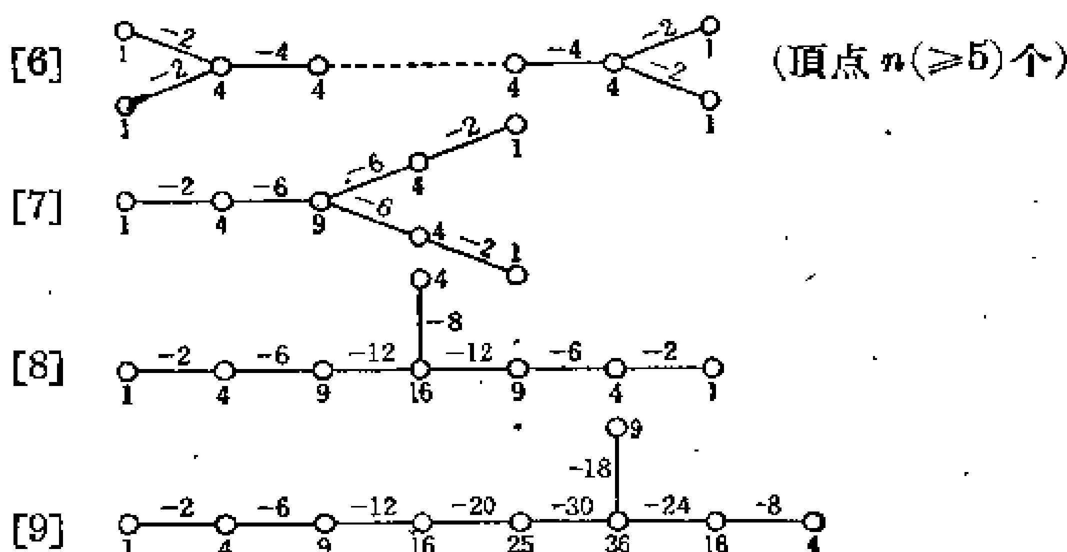
[3] 

(頂点 $n(\geqslant 4)$ 个)

[4] 

(頂点 $n(\geqslant 3)$ 个)

[5] 



4. 旣約可容系的決定 I. 有三重綫段的情况

旣約可容系 Π 的图形 L 如果有三重綫段，則 L 不会再有其他綫段(参照 §33.3 之[1])。因此，L 之图形有如

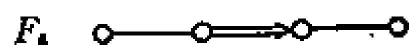
G_2 

这称为 G_2 型。

5. 旣約可容系的決定 II. 有二重綫段的情况

如果 L 沒有三重綫段，但有二重綫段，則二重綫段除一条外再无其他的二重綫段(参照 §33.3 之[2])。而且 L 不会有分歧点(参照 §33.3 之 [3])。此外，L 不会含有一重或二重綫段所成的閉綫路 (cycle) (参照 §33.3 之 [4])。这时可以分为如下各种情况：

(a) **从二重綫段的两端出現一重綫段的情况**：这时根据 §33.3 之 [5]，L 之图形有如

F_4 

这称为 F_4 型。

(b) **从二重綫段的一端出現一重綫段的情况**：这时 L 的图形作为上述的結果，有如



頂点的个数設为 n，則根据矢向的方向，L 組成前面§33.2所述的 B_n 或 C_n 的图形。

6. 既約可容系的决定 III. 只有一重綫段的情况

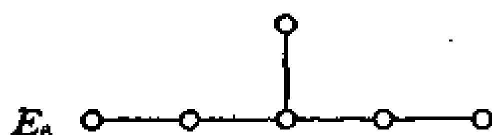
設 L 只含有一重綫段。这时 L 不会有2个以上的分歧点(§33.3之[6]里，$n>5$ 时)；从一个頂点分出的綫段頂多只有三条(§33.3之[6]里，$n=5$ 时)；L 不含有閉綫路(§33.3之[4])。这时可以分成下面两种情况：

(a) **沒有分歧点的情况**：这时 L 組成§33.2所述的 A_n 的图形。

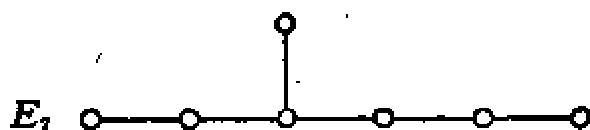
(b) **有分歧点的情况**：从分歧点分出的綫段之"长"不会全部 $\geqslant 2$(参照§33.3之[7])，亦即，至少有一条之长是1. 如果有两条长为1的綫段自分歧点分出的話，則为§33.2之 D_n 的图形。

最后，假設从分歧点分出的綫段长为 $1, p, q[p\geqslant 2, q\geqslant 2]$。

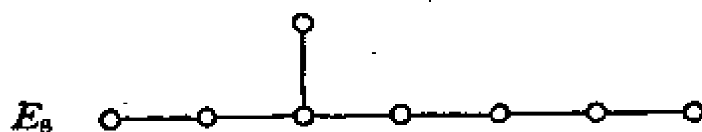
$p=q=2$ 时，L 称为 E_6 型的图形，有如



$p=2, q=3$ 时，L 称为 E_7 型的图形，其形象有如



$p=2, q=4$ 时，L 称为 E_8 型的图形，其形象有如



$p=2, q\geqslant 5$ 的情况不存在(参照§33.3之[9])。

$p\geqslant 3, q\geqslant 3$ 的情况不存在(参照§33.3之[8])。

現在要驗証

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

实际上是某一既約可容系的图型。取 $n+1$ 維 Euclid 空間 E^{n+1} 的正規直交系 $e_1, \cdots, e_{n+1}$。以

$$s=e_1+e_2+\cdots+e_{n+1},$$

和 s 成直交的向量全体所成的 n 維子空間記作 R^n。

$$e_i-e_{i+1}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

构成 R^n 之基底。設由 e_i 投向 R^n 的正射影为 $\bar{e}_i$，則

$$\bar{e}_i=e_i-\frac{(e_i,\ s)}{|s|^2}s=e_i-\frac{1}{n+1}s\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1).$$

由于 $\quad (\bar{e}_i,\ \bar{e}_j)=\delta_{ij}-\dfrac{1}{n+1},\ (\bar{e}_i,\ e_j)=\delta_{ij}-\dfrac{1}{n+1}$

等等，在利用上述的記号下，我們容易通过計算求得下面这些既約可容系。

G_2: $n=2,\quad \alpha_1=e_1-e_2,\ \alpha_2=\bar{e}_2,$

F_4: $n=3,\quad \alpha_1=e_1-e_2,\ \alpha_2=e_2-e_3,\ \alpha_3=e_3,$

$$\alpha_4=\frac{1}{2}(e_4-e_1-e_2-e_3),$$

E_p: $(p=6,\ 7,\ 8)\ n=p-1,$

$$\alpha_i=e_i-e_{i+1}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1),$$

$$\alpha_p=-\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3-\frac{\sqrt{9-p}}{p}s.$$

把以上所說的綜合起来，就有下述定理。

定理 1 既約可容系一定和如下图型

$$A_n(n\geqslant 1),\ B_n(n\geqslant 2),\ C_n(n\geqslant 3),\ D_n(n\geqslant 4),$$

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

中的某一个相似。这些图型彼此互不相似。

这里发生了这样一个問題：以 $G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$ 作为根之

基本系的复数体 C 上，单純 Lie 环是否存在？对此已有肯定的解答❶。(如果存在的話，則除同构外是唯一确定的。) 这样的 5 个 Lie 环分别称为 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 型的**例外单純 Lie 环** (exceptional simple Lie algebra)。与此相对的有 A_n, B_n, C_n, D_n 型的单純 Lie 环称为**古典的单純 Lie 环**。从 G_2 到 E_8，即 $G_2 \sim E_8$ 型的 Lie 环在复数体 C 上之維数有如下表：

	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
維 数	14	52	78	133	248

据上所述，定理 1 可以换成如下的定理：

定理 2 (Cartan 关于单純 Lie 环的分类定理) 复数体上之单純 Lie 环一定和

$$A_n(n\geqslant 1),\ B_n(n\geqslant 2),\ C_n(n\geqslant 3),\ D_n(n\geqslant 4),$$
$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

各型中的某一型同构。这些型式彼此互不同构。

❶ 参照书末文献表 [1], [4]。

第7章 半单純 Lie 环的表現論

本章介紹有关半单純 Lie 环之表現論的主要定理，以及在 A_n，B_n，C_n，D_n 等情况下的应用。要叙述有关完全可約性之 Weyl 定理，关于由最高权来决定表現的 Cartan 定理，由有限个基本表現产生任何一种既約表現，关于这些基本表現之存在性的 Cartan 定理以及它們的决定方法，特别对 A_n，B_n，C_n，D_n 等情况下要作具体的說明。近年由 Harish-Chandra 等人开拓了无限維的表現論，但在这里无法談到，請讀者参考其他文献，例如书末文献表中的 [3]。此外，特别在 A_n 的情况下，利用 Young 的图形，使既約表現在張量空間中实現出来 (Weyl 理論)，B_n 与 C_n 之旋 (spin) 表現，特别是对三維回轉群之旋表現作为应用而加以說明。但因为篇幅的限制，类似的証明都略去了❶。为了使概念的叙述清楚起見，根据 § 35 以下的实例，对定理与定义的涵义进行考虑就可以了。至于对 A_n，B_n，C_n，D_n 的表現論，更詳細的說明請参考书末的文献表。

§ 34 既約表現的最高权，基本的既約表現

1. 权的变換，Weyl 群

設 $\mathfrak{g}$ 为复数体 C 上之半单純 Lie 环，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子环。以下将 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ 作为固定的，同时根据 $\mathfrak{h}_R$ 的一个基底对 $\mathfrak{h}_R$ 引进順序，这种順序也作为固定的。这时单純根之全体記作 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ $(l=\dim\mathfrak{h})$。

---

❶ 証明請参照书末文献表 [3]，[4]，[7] 或 I. Satake, On a theorem of E. Cartan, Journ. Math. Soc. Japan, 2 (1951).

設有 $\mathfrak{g}$ 之表現是 (ρ,V)，$\mathfrak{h}$ 在 V 上之表現可以导引出来。这时，这个表現中的 $\mathfrak{h}$ 之权 Λ 称为 $\mathfrak{g}$ 的表現 (ρ,V)（关于 $\mathfrak{h}$）之权。这就是說，$\mathfrak{h}$ 上的一次形式 Λ 称为表現 (ρ,V) 之权，指的是在 V 內有 $e\neq 0$ 存在，对于 $\mathfrak{h}$ 之任一元素 H 有 $\rho(H)e=\Lambda(H)e$ 成立。根据 §22.4 之定理 4，有

$$V=\sum_{\Lambda} V_{\Lambda} \quad (\text{直和})。$$

右边的总和是对表現 (ρ,V) 之所有的权（只能是有限个）而言的。事实上，这时对于 V_{Λ} 之每一元素 x，可以証明

$$\rho(H)x=\Lambda(H)x \quad (H\in\mathfrak{h})$$

是成立的。

权 Λ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上取实数値。实际上，設对应于根 $\alpha\neq 0$ 的 $\mathfrak{h}$ 之元素是 H_α，那么如果整数 $j\geqslant 0$，$k\geqslant 0$ 按照条件

$$\begin{cases}\Lambda-j\alpha,\ \cdots,\ \Lambda-\alpha,\ \Lambda,\ \Lambda+\alpha,\ \cdots,\ \Lambda+k\alpha \text{ 是权}, \\ \Lambda-(j+1)\alpha,\ \Lambda+(k+1)\alpha \qquad\qquad \text{不是权}\end{cases}$$

决定时，和 (25.3) 同样地有

$$\frac{2\Lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=j-k=\text{整数}。\tag{34.1}$$

因此，$\Lambda(H_\alpha)$ 是实数。由于 $\mathfrak{h}_R$ 是由 H_α 架成(span)的，所以 Λ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上是实数，即 $\Lambda\in\mathfrak{h}_{R^*}$。

注意1　在 $\{\Lambda+\nu\alpha\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ 中的权其实只限于 $\{\Lambda+\nu\alpha\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$，这是可加以証明的。$\{\Lambda+\nu\alpha\}_{\nu=-j}^{\nu=k}$ 称为权 Λ 之 α-級数。

由上所述，我們看出 $\Lambda-\dfrac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\Lambda-(j-k)\alpha$ 也是权。如以 α 作为法綫向量，沿这法綫向量而关于 $\mathfrak{h}_{R^*}$ 之超平面的反射記作 S_α，那么上面的式子就是对 Λ 施以反射 S_α 的結果，因此可以写成

$$S_\alpha(\Lambda)=\Lambda-\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha。\tag{34.2}$$

当然有 $S_\alpha^2=I$（恒等变换）。如果特别把 ρ 取作伴随表現，則 S_α 使

根系 Δ 不变，即 $S_\alpha(\Delta)=\Delta$。因而 S_α 对有限集 Δ 之作用就象一个置换。既如上述，由 $\mathfrak{h}_{R*}$ 产生了 $S_\alpha(\alpha\in\Delta)$，$\mathfrak{h}_{R*}$ 之直交变换所組成的群記作 W，称为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之 **Weyl** 群。W 的元素起着对 Δ 之置換作用，而 Δ 架成 $\mathfrak{h}_{R*}$，所以 W 之元素是由对 Δ 所起的置換决定的，因此 W 是有限群。从§30的定理3知道，自各 $S\in W$ 可以扩充到使 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{h}$ 为不变的某一自同构 φ。其实，还可以扩充于内部自同构。从这桩事实就知道权 $\Lambda, S(\Lambda)$ $(S\in W)$ 之重复度是互等的，亦即

$$\dim V_\Lambda=\dim V_{S(\Lambda)}.$$

很显然，如果 $S\in W$，則 $S(\Pi)=\{S\alpha_1,\cdots,S\alpha_l\}$ 仍是 $\mathfrak{g}$ 的根之基本系。事实上，若 Π 与 Π' 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根之基本系，則知道有某一个 $S\in W$ 使 $S(\Pi)=\Pi'$。因此，Π 和 Π' 是合同的（从这桩事实可以証明，同构的半单純 Lie 环之根的基本系是相似的）。还有，W 是由 $S_{\alpha_1},\cdots,S_{\alpha_l}$ 生成的这一事实也可以推知。

2. 表現之最高权

$\mathfrak{g}$ 的表現 (ρ,V) 之权 Λ 是 $\mathfrak{h}$ 上的实形式。考虑到 $\mathfrak{h}_R$ 中确定的基底所定的順序，对表現 (ρ,V) 之权間也引进順序。关于这順序，最大的权 Λ_0，亦即对于其他的权 Λ 有关系

$$\Lambda_0>\Lambda$$

的权 Λ_0，叫做表現 (ρ,V) 关于某一考虑到的順序的**最高权**。对于最高权 Λ_0，我們知道有 $\dim V_{\Lambda_0}=1$。

3. 根据最高权的既約表現之决定，Weyl 的完全可約性定理

定理 1 (Cartan) 設 $\mathfrak{g}$ 之既約表現 (ρ_i,V_i) $(i=1,2)$ 的最高权各为 Λ_1 与 Λ_2，則表現 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2) 等价的必要与充分条件是 $\Lambda_1=\Lambda_2$。

这表明，既約表現等价性之判定归結为一次形式的一致。因此，要决定所有的既約表現，只要决定那些构成最高权的一次形式

之全体就好了。关于 $\mathfrak{g}$ 的表現是否为既約表現的問題，有如下的基本定理。

定理 2 (Weyl) $\mathfrak{g}$ 之任意表現是完全可約的[1]。

4. $\mathfrak{h}$ 上的綫性形式是某一表現的权之条件

$\mathfrak{g}$ 之表現的权 Λ 不能是 $\mathfrak{h}$ 上的任意一次形式。由 (1) 知道，$2(\Lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)=$ 整数对于各根 $\alpha\neq 0$ 是成立的。合乎这一条件的 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式称做**整形式**。因而权必然是整形式。反之，有下述定理。

定理 3 $\mathfrak{h}$ 上的整形式 Λ 是某一既約表現之权。

5. $\mathfrak{h}$ 上之整形式是某一表現之最高权的条件

已知 $\mathfrak{h}$ 上的整形式 Λ 是某一表現的权，但又发生另一問題：$\mathfrak{h}$ 上怎样的整形式 Λ 才是某一既約表現 (ρ, V) 之最高权？首先，求其必要条件。如果 Λ 是既約表現 (ρ, V) 之最高权，那末对于各 $S\in \boldsymbol{W}$，$S(\Lambda)$ 也是表現 (ρ, V) 之权。因此

$$S(\Lambda)\leqslant \Lambda \quad (\text{对于各 } S\in \boldsymbol{W} \text{ 而言}). \tag{34.3}$$

满足 (34.3) 的 $\mathfrak{h}$ 上之整形式 Λ 叫做**强整形式**(dominant)。特别，当取反射 S_{α_i} (由单純根 α_i 所生的反射) 作为 S 时，根据 (34.2)，要 (34.3) 成立，则

$$(\Lambda, \alpha_i)\geqslant 0 \quad (i=1, \cdots, l) \tag{34.4}$$

是必要的。联系上面的条件，以下的定理也成立。

定理 4 (Cartan) (1) $\mathfrak{h}$ 上的强整形式是某一既約表現的最高权。

(2) $\mathfrak{h}$ 上之整形式 Λ 成为强整形式的必要与充分条件是 (34.4) 成立。

---

[1] Weyl 的証明大致如下：根据 §21.1 末了的注意，只要能証明 $\mathfrak{g}$ 之致密形 $\mathfrak{g}_u$ 的任意复表現 ρ 是完全可約的就好了。作出以 $\mathfrak{g}_u$ 当作 Lie 环的致密連通 Lie 群 G 以及它的表現 P，使 $dP=\rho$，那末根据致密的理論，P 是完全可約的，因而，ρ 也完全可約。而要作 G 与 P，利用 § 31 的 Weyl 定理，取单連通 Lie 群作为 G 就可以了。

6. 表現之張量积的最高权

設有 $\mathfrak{g}$ 的两个表現 (ρ, V) 与 (σ, U)，以

$$V=V_{\Lambda_1}+\cdots+V_{\Lambda_r},\quad U=U_{\Lambda'_1}+\cdots+U_{\Lambda'_s},$$

那么，显然有

$$V\otimes U=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}V_{\Lambda_i}\otimes U_{\Lambda'_j}. \tag{34.5}$$

如果考虑到 $V\otimes U$ 上的表現 $\rho\otimes\sigma$，则

$$(V\otimes U)_\Lambda=\sum_{\Lambda_i+\Lambda'_j=\Lambda}V_{\Lambda_i}\otimes U_{\Lambda'_j} \tag{34.6}$$

成立。事实上，若 $x\in V_{\Lambda_i}$, $y\in U_{\Lambda'_j}$，则有

$$\rho(H)x\otimes y+x\otimes\sigma(H)y=(\Lambda_i(H)+\Lambda'_j(H))\ (x\otimes y),$$

因而有(34.6)。这式意味着关于 $\mathfrak{h}$ 之表現，要求 $V\otimes U$ 之特征空間分解，只要在(34.5)里把所有的 Λ_i 和 Λ'_j 两两各配成对，使每对的 $\Lambda_i+\Lambda'_j$ 彼此相等就行了。

特别当 Λ_1 和 Λ'_1 皆为最高权时，$\Lambda_1+\Lambda'_1$ 是 $V\otimes U$ 上之表現的最高权。

注意 2 即使 U 与 V 都是既約的，$U\otimes V$ 却不一定既約。包含 $V_{\Lambda_1}\otimes U_{\Lambda'_1}$ 的 $V\otimes U$，其最小的 $\mathfrak{g}$-不变子空間决定了一种既約表現，以 $\Lambda_1+\Lambda'_1$ 作为最高权。

7. 基本的既約表現

設 $\mathfrak{h}$ 上的整形式之全体为 $\mathfrak{P}$，强整形式之全体为 $\mathfrak{P}^+$，则 $\mathfrak{P}^+\subset\mathfrak{P}$. 可以証明，$\mathfrak{P}$ 是 l 維 Euclid 空間 $\mathfrak{h}_{R^*}$ 中的 l 維格子群。亦即

定理 5 (Cartan) $\mathfrak{P}$ 中存在着 l 个綫性无关的元素 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$，$\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{h}^*$ 中形如 $\sum_{i=1}^{l}m_i\Lambda_i$ ($m_1,\cdots,m_l$ 是任意整数)的元素之全体所成的集合是一致的。$\mathfrak{P}^+$ 是和

$$m_i\geqslant 0\quad (i=1, 2, \cdots, l)$$

这样的 $\mathfrak{P}$ 中元素的全体一致的。

以这样的 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ 作为最高权的 $\mathfrak{g}$ 之既約表現，分别記以 $(\rho_1, V_1), \cdots, (\rho_l, V_l)$。这些表現称做 $\mathfrak{g}$ 的**基本既約表現**（或**既約表現之基本系**）。那些 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ 叫做**基本的权**（或**权的基本系**）。这时，以强整形式 Λ 作为最高权的既約表現 (ρ, V)，可以用以下的方式求得。如果 Λ 表达成

$$\Lambda = m_1\Lambda_1 + \cdots + m_l\Lambda_l \quad (m_i \text{ 是整数，而且 } \geqslant 0),$$

则由 §34.5，(ρ, V) 是

$$\underbrace{V_1 \otimes \cdots \otimes V_1}_{m_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{V_l \otimes \cdots \otimes V_l}_{m_l} \quad (\text{設} = U) \tag{34.7}$$

之既約成分，它和含有 U 之最高权 Λ 的特征空間 $U_\Lambda = (V_1)_{\Lambda_1} \otimes \cdots \otimes (V_1)_{\Lambda_1} \otimes \cdots \otimes (V_l)_{\Lambda_l} \otimes \cdots \otimes (V_l)_{\Lambda_l}$ 的最小 $\mathfrak{g}$-不变子空間上之表現是等价的。

这样說来，形式为(34.7)的表現，分解为既約成分。从此就可以求得 $\mathfrak{g}$ 之任何既約表現(有无穷多个)。根据这个理由，所以 (ρ_i, V_i) $(1 \leqslant i \leqslant l)$ 称做 $\mathfrak{g}$ 之基本既約表現。

計算基本权的**具体方法**以下将要提到。对于 $\mathfrak{g}$ 之根系 Δ，$\alpha \in \Delta$ 之"反轉" α^* 規定为

$$\alpha^* = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}. \tag{34.8}$$

α^* 也是 $\mathfrak{h}_{R^*}$ 的元素。如以 $\Delta^* = \{\alpha^*; \alpha \in \Delta\}$，則因 Δ^* 也是阶数为 l 的某一半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}^*$ 之根系。因此，$\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_l^*\}$ 組成 Δ^* 的根之基本系。那就是說，任何一个 $\alpha^* \in \Delta^*$，可以用

$$\alpha^* = m_1\alpha_1^* + \cdots + m_l\alpha_l^*$$

的形式唯一地表达出来。这里的 $m_1, \cdots, m_l$ 是整数，它們或者同时 $\geqslant 0$，即 $m_i \geqslant 0$；或者同时 $\leqslant 0$，即 $m_i \leqslant 0$。从而，$\mathfrak{h}$ 上的一次形式 Λ 成为整形式的条件是

$$(\Lambda, \alpha_1^*), \cdots, (\Lambda, \alpha_l^*) \text{ 全为整数。}$$

Λ 成为强整形式的条件是

$$(\Lambda, \alpha_1^*), \cdots, (\Lambda, \alpha_l^*) \text{ 全都是 } \geqslant 0 \text{ 的整数。} \tag{34.9}$$

因此,要求 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$, 只要解

$$(\Lambda_i, \alpha_j^*) = \delta_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant l) \tag{34.10}$$

就可以了。亦即，把和 $\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_l^*\}$ 成对偶的 $\mathfrak{h}_{R^*}$ 之基底取作 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ 就行了。这时对于权 Λ, 以 $(\Lambda, \alpha_i^*) = m_i$, 则 $\Lambda = m_1\Lambda_1 + \cdots + m_l\Lambda_l$。

§35 古典单純 Lie 环的基本既約表表

下面提到有关 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 和根之基本系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的事情与 §26 至 §29 所述的一样。記号 E_{ij} 等的使用也和以前相同。

1. $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, C)$

$\mathfrak{h}$ 是由 $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i E_{ii} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0\right)$ 这样的元素所組成的,因此,当 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式以

$$f(H) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \lambda_i \quad \left(H = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i E_{ii}, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0\right) \tag{35.1}$$

表示时,系数 a_i 不是唯一的。也就是說,对所有的 $a_1, \cdots, a_{n+1}$ 用同一常数加了以后, f 是不变的。因此，为了要唯一地确定系数 a_i,我們施行如下的**标准化**。如以

$$a_i' = a_i - \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}),$$

那么, $f(H) = \sum a_i' \lambda_i$, 而新的系数 a_i' 满足**标准化条件**

$$a_1' + a_2' + \cdots + a_n' = 0.$$

以后把(35.1)簡写成 $f = \sum a_i \lambda_i$.

$\mathfrak{h}$ 上的一次形式 $f = \sum a_i \lambda_i$ 与 $g = \sum b_i \lambda_i$ 經标准化后，和 f, g 对应的 $\mathfrak{h}$ 之元素 H_f 和 H_g 是

$$H_f = \frac{1}{2(n+1)} \sum a_i E_{ii}, \quad H_g = \frac{1}{2(n+1)} \sum b_i E_{ii},$$

因此, f 与 g 之内积将是

$$(f, g) = B(H_f, H_g) = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i.$$

由于 α_i 之反轉 $\alpha_i^* = 2(n+1)\alpha_i = 2(n+1)(\lambda_i - \lambda_{i+1})$ 可以标准化，因此，如把 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式 Λ 写成

$$\Lambda(H) = \sum_{i=1}^{n+1} m_i\lambda_i \quad (H = \sum \lambda_i E_{ii}, \sum \lambda_i = 0),$$

则系数 m_i 經标准化后滿足

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{n+1} = 0.$$

这时，　　$(\Lambda, \alpha_i^*) = m_i - m_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，

因而得出下面的判定法則：

Λ 是整形式 $\rightleftarrows$ $m_i - m_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 全体是整数，

整形式 Λ 是强的 $\rightleftarrows$ $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$.

以下試求基本权 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$. 以

$$\Lambda_i = \sum m_j^{(i)}\lambda_j, \quad \sum_j m_j^{(i)} = 0,$$

则由(34.10)得

$$m_1^{(i)} = m_2^{(i)} = \cdots = m_i^{(i)}, \quad m_i^{(i)} - m_{i+1}^{(i)} = 1, \quad m_{i+1}^{(i)} = \cdots = m_{n+1}^{(i)}.$$

从而代进 $m_1^{(i)} + \cdots + m_{n+1}^{(i)} = 0$ 里去，得到

$$m_1^{(i)} = m_2^{(i)} = \cdots = m_i^{(i)} = \frac{n+1-i}{n+1}, \quad m_{i+1}^{(i)} = \cdots = m_{n+1}^{(i)} = \frac{-i}{n+1}.$$

为了看起来更方便些，Λ_i 也可以写成如下未經标准化的形式。

$$\Lambda_i = \frac{n+1-i}{n+1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_i) - \frac{i}{n+1}(\lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_{n+1})$$
$$= \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \quad (i = 1, \cdots, n).$$

因此我們得到以下的式子。

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1, \\ \Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \Lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \cdots\cdots, \\ \Lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = -\lambda_{n+1}. \end{cases}$$

2. $B_n \approx \mathfrak{o}(2n+1, C) \quad (n \geqslant 1)$

对于 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式 $f(H)=\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i$, $g(H)=\sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i$ ($H=H(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$)，和 §35.1 一样地計算內积，則有

$$(f, g)=\frac{1}{2(2n-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

这时，根基本系之反轉是

$$\begin{cases} \alpha_i^* = 2(2n-1)\alpha_i = 2(2n-1)(\lambda_i-\lambda_{i+1}) \quad (i=1, \cdots, n-1), \\ \alpha_n^* = 4(2n-1)\alpha_n = 4(2n-1)\lambda_n, \end{cases}$$

因此，对于 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式 $\Lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$ 有

$$\begin{cases} (\Lambda, \alpha_i^*) = m_i - m_{i+1} \quad (i=1, \cdots, n-1), \\ (\Lambda, \alpha_n^*) = 2m_n. \end{cases}$$

从而得到下面的判定法則。

Λ 是整形式 $\rightleftarrows$ 所有的 $m_1-m_2, m_2-m_3, \cdots, m_{n-1}-m_n, 2m_n$ 全是整数，

$\rightleftarrows$ 所有的 $m_1, m_2 \cdots, m_n$ 全是整数，或者全是半整数❶。

整形式 $\Lambda = m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$ 是强形式的条件为

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n \geqslant 0.$$

試求基本权 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$. 以

$$\Lambda_i = m_1^{(i)}\lambda_1 + \cdots + m_n^{(i)}\lambda_n,$$

由 (34.10)，对于 $i=1, 2, \cdots, n-1$，得

$$m_1^{(i)} = \cdots = m_i^{(i)}, \quad m_i^{(i)} - m_{i+1}^{(i)} = 1, \quad m_{i+1}^{(i)} = \cdots = m_n^{(i)} = 0.$$

对于 $i=n$ 有 $$m_1^{(n)} = \cdots = m_n^{(n)} = \frac{1}{2}.$$

因此，得

❶ 取形式 $\frac{1}{2}\times$(奇数)的整数称为半整数。

$$\begin{cases} \Lambda_1=\lambda_1, \\ \Lambda_2=\lambda_1+\lambda_2, \\ \cdots\cdots, \\ \Lambda_{n-1}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}, \\ \Lambda_n=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n). \end{cases}$$

$n=1$ 时，有 $\Lambda_1=\frac{1}{2}\lambda_1$。

3. $C_n=\mathfrak{sp}(n, C)$ $(n\geqslant 1)$

对于 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式 $f(H)=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i$ 和 $g(H)=\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda_i$ $(H=H(\lambda_1,\cdots,\lambda_n))$，同样地計算它們所成的內积

$$(f, g)=\frac{1}{2(2n+2)}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

这时，根基本系之反轉是

$$\begin{cases} \alpha_i^*=2(2n+2)\alpha_i=2(2n+2)(\lambda_i-\lambda_{i+1}) \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \\ \alpha_n^*=(2n+2)\alpha_n=2(2n+2)\lambda_n, \end{cases}$$

因此，对于 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$，有

$$\begin{cases} (\Lambda, \alpha_i^*)=m_i-m_{i+1} \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \\ (\Lambda, \alpha_n^*)=m_n. \end{cases}$$

从而得到如下的判定法則。

Λ 是整形式 $\rightleftarrows$ 所有的 $m_1-m_2, m_2-m_3, \cdots, m_{n-1}-m_n, m_n$ 全部是整数，

$\rightleftarrows$ 所有的 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 全部是整数。

整形式 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$ 为强形式的条件是

$$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_n\geqslant 0.$$

如果要求基本权 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$，則以

$$\Lambda_i=m_1^{(i)}\lambda_1+\cdots+m_n^{(i)}\lambda_n,$$

由 (34.10)，对于 $i=1, 2, \cdots, n-1$，得到

$$m_1^{(i)}=\cdots=m_i^{(i)}, \quad m_i^{(i)}-m_{i+1}^{(i)}=1, \quad m_{i+1}^{(i)}=\cdots=m_n^{(i)}=0.$$

对于 $i=n$，有 $m_1^{(n)}=\cdots=m_n^{(n)}=1$。

因此

$$\begin{cases}\Lambda_1=\lambda_1,\\ \Lambda_2=\lambda_1+\lambda_2,\\ \cdots\cdots,\\ \Lambda_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.\end{cases}$$

4. $D_n\approx\mathfrak{o}(2n, C)$ $(n\geqslant 3)$

对于 $\mathfrak{h}$ 上的一次形式 $f(H)=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i$ 和 $g(H)=\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i$，$(H=H(\lambda_1,\cdots,\lambda_n))$，同样地計算它們的內积，有

$$(f, g)=\frac{1}{2(2n-2)}\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

这时，根基本系之反轉是

$$\begin{cases}\alpha_i^*=2(2n-2)\alpha_i=2(2n-2)(\lambda_i-\lambda_{i+1}) \quad (i=1, 2, \cdots, n-1),\\ \alpha_n^*=2(2n-2)\alpha_n=2(2n-2)(\lambda_{n-1}+\lambda_n),\end{cases}$$

因此，对于 $\mathfrak{h}$ 上之一次形式 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$，有

$$\begin{cases}(\Lambda, \alpha_i^*)=m_i-m_{i+1} \quad (i=1, 2, \cdots, n-1),\\ (\Lambda, \alpha_n^*)=m_{n-1}+m_n.\end{cases}$$

从而得到如下的判定法則。

Λ 是整形式 $\rightleftarrows$ 所有的 $m_1-m_2, m_2-m_3, \cdots, m_{n-1}-m_n, m_{n-1}+m_n$ 全部是整数

$\rightleftarrows$ 所有的 $m_1,\cdots,m_n$ 全是整数，或全是半整数。

整形式 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$ 为强形式的条件是

$$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_{n-1}\geqslant m_n,\ m_{n-1}\geqslant -m_n.$$

如果要求基本权 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$，則以

$$\Lambda_i=m_1^{(i)}\lambda_1+\cdots+m_n^{(i)}\lambda_n,$$

由(34.10)，对于 $i=1, 2, \cdots, n-2$，得到

$$m_1^{(i)}=\cdots=m_i^{(i)},\ m_i^{(i)}-m_{i+1}^{(i)}=1,\ m_{i+1}^{(i)}=\cdots=m_n^{(i)},$$

$$m_{n-1}^{(i)}=-m_n^{(i)}.$$

对于 $i=n-1, n$，有

$$m_1^{(n-1)}=\cdots=m_{n-1}^{(n-1)},\ m_{n-1}^{(n-1)}-m_n^{(n-1)}=1,\ m_n^{(n-1)}+m_n^{(n-1)}=0,$$

$$m_1^{(n)}=\cdots=m_n^{(n)},\ m_{n-1}^{(n)}+m_n^{(n)}=1.$$

因此，

$$\begin{cases} \Lambda_1=\lambda_1, \\ \Lambda_2=\lambda_1+\lambda_2, \\ \cdots\cdots, \\ \Lambda_{n-2}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2}, \\ \Lambda_{n-1}=\dfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}-\lambda_n), \\ \Lambda_n=\dfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}+\lambda_n). \end{cases}$$

注意 1　$n=2$ 时，$\mathfrak{o}(4, C)$ 不是单純的，和上面一样，$\Lambda_1=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)$，$\Lambda_2=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$ 是权之基本系。

5．求基本权的另一种方法

假使复数体 C 上之半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$ 与其 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 已給定，$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根之基本系为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ $(l=\dim \mathfrak{h})$，如要計算它們的內积 (α_i, α_j)，可以按照如下的方式进行，把权之基本系 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ 的計算法归結为逆矩陣的計算。今以

$$\Lambda_i=s_{i1}\alpha_1+\cdots+s_{il}\alpha_l\ \ (s_{i1}, \cdots, s_{il}\text{ 是数量}),$$

只要能求出 $S=(s_{ij})$ 就好了。为此，設 α_i 之反轉为 $\alpha_i^*=\dfrac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$，則

$$(\alpha_i, \alpha_j^*)=\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}=\text{整数}(\text{設}=t_{ij}).$$

t_{ij} 是变了符号的 Cartan 整数 a_{ij}。l 阶矩陣 $T=(t_{ij})$ 暂称为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 的 **Cartan 矩陣**。当 T 給定时，則 $\mathfrak{g}$ 除同构对应外是唯一确定的。这时把(34.10)改写一下，写成

$$\sum_{k=1}^{l} s_{ik}t_{kj}=\delta_{ij},\ \text{亦即 } ST=I.$$

因此，如果求出 T 之逆矩陣 S，則得到 $A_1, \cdots; A_l$。

以下，对于 A_n, B_n, C_n, D_n 分别把相应的 Cartan 矩陣 T_n，$S_n=T_n^{-1}$ 以及 $\det T_n$ 写出来。

A_n：$\det T_n=n+1 \quad (n\geqslant 1)$。

$$T_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad S_n=\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 6 & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 9 & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4(n-3)\cdots\ \cdots 4(n-3) & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 3(n-2) & 2(n-2) & n-2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

例如說，$n=5$ 时有

$$T_5=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad S_5=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

B_n：$\det T_n=2 \quad (n\geqslant 2)$，

$$T_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad S_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & \cdots & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 8 & 8 & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & 2(n-1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

C_n：$\det T_n=2 \quad (n\geqslant 2)$，

这时的 T_n 和 S_n 分别是 B_n 之 T_n 和 S_n 的轉置矩陣。

D_n: $\det T_n = 4$　$(n \geqslant 3)$,

$$T_n = \left|\begin{array}{cccccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & & & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \quad S_n = \frac{1}{4}\left|\begin{array}{cccccc|c|c} 4 & 4 & 4 & \cdots & & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & \cdots & & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & \cdots & & 12 & 6 & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 16 & \cdots & 16 & 8 & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \cdots & 4(n-2) & 2(n-2) & 2(n-2) \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-2) & n & n-2 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-2) & n-2 & n \end{array}\right|$$

G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 之 Cartan 矩陣可以从其根之基本系的图形(§ 33)直接作出，表示如下。

G_2: $\alpha_1 \Rrightarrow \alpha_2$　$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det T_2 = 1$.

F_4: $\alpha_1 — \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 — \alpha_4$　$T_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$S_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det T_4 = 1.$$

E_6:

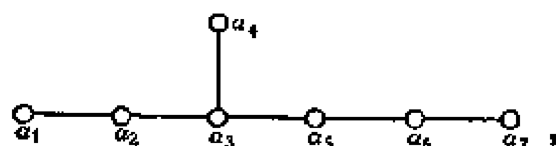
α_4

$\alpha_1 — \alpha_2 — \alpha_3 — \alpha_5 — \alpha_6$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$S_6=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&5&6&3&4&2\\5&10&12&6&8&4\\6&12&18&9&12&6\\3&6&9&6&6&3\\4&8&12&6&10&5\\2&4&6&3&5&4\end{bmatrix},\quad \det T_6=3.$$

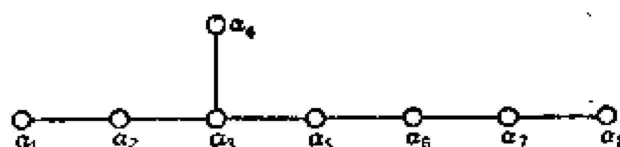
E_7:



$$T_7=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&0&0\\0&-1&2&-1&-1&0&0\\0&0&-1&2&0&0&0\\0&0&-1&0&2&-1&0\\0&0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&-1&2\end{bmatrix},$$

$$S_7=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&6&8&4&6&4&2\\6&12&16&8&12&8&4\\8&16&24&12&18&12&6\\4&8&12&7&9&6&3\\6&12&18&9&15&10&5\\4&8&12&6&10&8&4\\2&4&6&3&5&4&3\end{bmatrix},\quad \det T_7=2.$$

E_8:



$$T_8=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$S_8=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & 5 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 20 & 10 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 10 & 20 & 30 & 15 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 16 & 24 & 12 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 6 & 12 & 18 & 9 & 15 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 6 & 10 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det T_8=1.$$

6. Cartan 矩陣的拓扑意义

設有复数体 C 上之半单純 Lie 环 $\mathfrak{g}$，其致密形設为 $\mathfrak{g}_u$。$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_u$ 之伴随群分别記以 G 与 G_u，以 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_u$ 作为 Lie 环的单連通 Lie 群設为 $\widetilde{G}$ 与 $\widetilde{G}_u$。由于 $\widetilde{G}\supset\widetilde{G}_u$，所以 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{G}_u$ 的中心是一致的，記之为 $\widetilde{Z}$。則

$$\widetilde{G}/\widetilde{Z}\approx G,\quad \widetilde{G}_u/\widetilde{Z}\approx G_u.$$

$\widetilde{Z}$ 是有限群，它和流形 G 及 G_u（即把 Lie 群 G 和 G_u 作为流形看待）之基本群是同构的。設 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子环为 $\mathfrak{h}$，其上整形式所成的格子群記作 $\{\Lambda\}$，由 $\mathfrak{h}$ 的根所組成的格子群記作 $\{\alpha\}$，則 $\{\Lambda\}\supset\{\alpha\}$，商群 $\{\Lambda\}/\{\alpha\}$ 和 $\widetilde{Z}$ 是同构的。如果 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 是关于 $\mathfrak{h}$ 的根之基本系，其 Cartan 矩陣記作 $T=\{t_{ij}\}$，則由 § 36.5 有

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\Lambda_j \quad (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l \text{ 是权之基本系}),$$

因此，如所周知，群$\{\Lambda\}/\{\alpha\}$可以求之如下。設T之单因子为$e_1, \cdots, e_l$(e_i是e_{i+1}之倍数，$i=1,\cdots,l-1$)，$\{\Lambda\}/\{\alpha\}\approx Z_{e_1}\times\cdots\times Z_{e_l}$(直积)。这里的$Z_{e_i}$是$e_i$次的巡回群。因此，計算出 Cartan 矩陣之单因子，就知道基本群$\tilde{Z}$之构造。特别，有$\det(T)=e_1,\cdots,e_l$表示群$\tilde{Z}$的位数。

对于A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7和E_8，其計算結果表示如下。

例如說，以G_2, F_4和E_8作为 Lie 环的連通 Lie 群必然是单連通的，这从下表就可以看出。在A_n的情况下，因$SL(n+1,C)$是单連通的，所以只要求$SL(n+1,C)$之中心就行了。容易知道，以1的$n+1$乘根$\omega_1,\cdots,\omega_{n+1}$作为元素的$n+1$个矩陣$\omega_i I$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$組成$SL(n+1,C)$的中心。

Lie 环	单　因　子	群 $\tilde{Z}$
A_n	$n+1, 1, \cdots, 1$	Z_{n+1}(巡回群)
B_n	$2, 1, \cdots, 1$	Z_2 (巡回群)
C_n	$2, 1, \cdots, 1$	Z_2 (巡回群)
D_n	$\begin{cases}2, 2, 1, \cdots, 1 & (n=\text{偶数})\\ 4, 1, \cdots, 1 & (n=\text{奇数})\end{cases}$	$Z_2\times Z_2$ Z_4 (巡回群)
G_2	$1, 1$	Z_1 (单位群)
F_4	$1, \cdots, 1$	Z_1 (单位群)
E_6	$3, 1, \cdots, 1$	Z_3 (巡回群)
E_7	$2, 1, \cdots, 1$	Z_2 (巡回群)
E_8	$1, \cdots, 1$	Z_1 (单位群)

§36 表現的构成

对于 A_n, B_n, C_n, D_n，其权之基本系 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ 已在 §35 讲到，以它們作为最高权的既約表現之构成方法将在这里提到，但要考虑到 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 上的順序和以下叙述的順序有关。

1. $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, C)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, C)$ 的元素 A 对应于 A 本身的映射构成 $\mathfrak{g}$ 在 $V = C^{n+1}$（$n+1$ 維的向量空間）上的表現，称为 $\mathfrak{g}$ 之**恒等表現**，以 ρ 表示它。ρ 之权是

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$$

这样的 $n+1$ 个整形式。如果进行 §35.1 所說的标准化，則

$$\lambda_i = -\frac{1}{n+1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1}) + \frac{n}{n+1}\lambda_i - \frac{1}{n+1}(\lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_{n+1}).$$

因此，如果 λ_i 用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $(\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1})$ 来表示时，則有

$$(n+1)\lambda_i = -\alpha_1 - 2\alpha_2 - \cdots - (i-1)\alpha_{i-1} + (n-i+1)\alpha_i + (n-i)\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n.$$

因而，若采用由 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 所决定的 $\mathfrak{h}^*$ 上之順序，則 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ 間的順序是

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{n+1}.$$

这就是說，λ_1 是最高的权。容易知道，ρ 是既約表現。对于权 λ_i 之特征空間 V_{λ_i}，有 $\dim V_{\lambda_i} = 1$ $(i = 1, \cdots, n+1)$，而 $V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_{n+1}}$（直和）。由于 $\Lambda_1 = \lambda_1$，所以 ρ 是以 Λ_1 作为最高权的既約表現。

其次，要求得以 $\Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ 作为最高权的既約表現，让我們考虑在張量积 $V_0^2 = V \otimes V$ 上 ρ 所引导出的表現 ρ_0^2。V_0^2 是反称張量所成的子空間 A_0^2 和对称張量所成的子空間 S_0^2 的直和：

$$V_0^2 = A_0^2 + S_0^2 \quad (\text{直和})。$$

A_0^2 是由形如 $x\wedge y=\frac{1}{2}(x\otimes y-y\otimes x)$ 的元素所架成的，S_0^2 是由形如 $x\circ y=\frac{1}{2}(x\otimes y+y\otimes x)$ 的元素所架成的。因此，它們是 g-不变子空間，其維数是

$$\dim A_0^2 = {}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\dim S_0^2 = (n+1)^2 - {}_{n+1}C_2 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

如果 $x\in V_{\lambda_i}$, $y\in V_{\lambda_j}$, 則对于 $H\in\mathfrak{h}$ (設 $H=H(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$，有

$$\begin{aligned}\rho_0^2(H)(x\wedge y) &= \frac{1}{2}\{\rho_0^2(H)(x\otimes y)-\rho_0^2(H)(y\otimes x)\}\\ &= \frac{1}{2}\{\rho(H)x\otimes y+x\otimes\rho(H)y-\rho(H)y\otimes x\\ &\quad -y\otimes\rho(H)x\}\\ &= \rho(H)x\wedge y+x\wedge\rho(H)y\\ &= (\lambda_i+\lambda_j)(x\wedge y).\end{aligned}$$

因此，如果 x_i 取作 V_{λ_i} 的基底，而作出 V 的基底 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 时，則 A_0^2 的基底是 $x_i\wedge x_j(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$。由 $x_i\wedge x_j$ 所架成的 A_0^2 之一次子空間記作 $(A_0^2)_{i,j}$ 时，

$$A_0^2 = \sum_{i<j}(A_0^2)_{ij}$$

是 A_0^2 关于 $\mathfrak{h}$ 的特征空間分解。因此当 ρ_0^2 在 A_0^2 上引导出的表現 (ρ_0^2, A_0^2) 記作 $\bar{\rho}_0^2$ 时，$\bar{\rho}_0^2$ 之权是如下的 ${}_{n+1}C_2$ 个一次形式：

$$\lambda_i+\lambda_j \quad (1\leqslant i<j\leqslant n+1).$$

从而，表現 $\bar{\rho}_0^2$ 之最高权是 $\lambda_1+\lambda_2=\Lambda_2$。这样就求得 $\bar{\rho}_0^2$。

其次，由于 $x_i\circ x_j(1\leqslant i, j\leqslant n+1)$ 是 S_0^2 的基底，所以在 S_0^2 上，ρ_0^2 所引导出的表現之权是

$$\lambda_i+\lambda_j(1\leqslant i, j\leqslant n+1) \quad \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\text{个}\right).$$

再者，不变子空間 A_0^2, S_0^2 是既約的。事实上，对于 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 之任意順列 $x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n+1)}$，如果取 $SL(n+1, C)$ 的适当元素 A，則因 $Ax_1 \in V_{\lambda_{\sigma(1)}}, \cdots, Ax_{n+1} \in V_{\lambda_{\sigma(n+1)}}$，且包含 $x_1 \wedge x_2$ 之不变子空間也包含所有的 $x_i \wedge x_j$ $(i \neq j)$。因而，这不变子空間就是 A_0^2。同样对 S_0^2 也能这样做。

和以上所說的同样进行，对于 $1 \leqslant r \leqslant n$，在 r 次的逆变張量空間 $V_0^r = V \otimes \cdots \otimes V$ (r 个)上，ρ 所誘导出的表現記作 ρ_0^r，V_0^r 中的反称張量之全体所成的子空間写成 A_0^r，它是 $\mathfrak{g}$-不变的，而且是既約的。在 A_0^r 上，ρ_0^r 所誘导出的表現 $\bar{\rho}_0^r$ 由于 A_0^r 之基底是 $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$，所以其权是如下的 ${}_nC_r$ 个：

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_r).$$

因而，$\bar{\rho}_0^r$ 之最高权是

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = \Lambda_r.$$

注意 1　$\bar{\rho}_0^r$ 是作为 $SL(n+1, C)$ 在 A_0^r 上之表現 P_0^r 的微分 dP_0^r 而求得的，即 $dP_0^r = \bar{\rho}_0^r$。这里的 P_0^r 是

$$A \to P_0^r(A): \ P_0^r(A)(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}) = Ax_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ax_{i_r}.$$

对于矩陣 A，P_0^r 也就是对应于一个由 r 阶的子行列式按照一定順序排列而成的 ${}_{n+1}C_r$ 阶矩陣的表現。例如 $r=2$，

$$P_0^2\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1,n+1} \\ a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} a_{1,n+1} \\ a_{21} a_{2,n+1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} a_{1,n+1} \\ a_{31} a_{3,n+1} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

特別当 $r=n$ 时，則因 $\det A = 1$，故 $P_0^n(A)$ 和 ${}^tA^{-1}$ 是一致的。从而，表現 $\bar{\rho}_0^n$ 非是

$$\bar{\rho}_0^n(A) = -{}^tA \quad (\text{逆步表現})$$

不可（这意味着 $\Lambda_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -\lambda_{n+1}$。亦即，因 ρ 之逆步表現 $\rho^* = -{}^t\rho$ 的权是 $-\lambda_1, \cdots, -\lambda_{n+1}$ 的緣故，其最高权是 $-\lambda_{n+1} = \Lambda_n$）。

此外，把 V_0^r 分解为既約的 $\mathfrak{g}$-不变子空間之直和，这桩事实和

r 次对称群 $\mathfrak{S}_r$ 之表現論[1]有着密切的关系。$\mathfrak{S}_r$ 是由 r 个数字 $1, \cdots, r$ 所成的置换之全体組成的 $n!$ 次群。对于 $\mathfrak{S}_r$ 之元素 σ 以及 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \in V_0^r$，規定

$$\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)},$$

那么，σ 是 V_0^r 的綫性变换。这样就可以得到 $\mathfrak{S}_r$ 在 V_0^r 上的表現。对于 $\mathfrak{S}_r$ 之群环 Γ_r 的元素，亦卽对于如 $a = \sum_\sigma a_\sigma \cdot \sigma$（$a_\sigma$ 是复数）形式的元素 a，規定

$$a \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = \sum a_\sigma \cdot \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r).$$

这时，容易知道，如果 $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, C)$，則

$$\rho_0^r(X) at = a \rho_0^r(X) t \quad (t \in V_0^r). \tag{36.1}$$

因而，$a(V_0^r)$ 是 $\mathfrak{g}$-不变子空間。

以下举出一个定理而略去証明[2]。

定理 1 (Weyl)　对于群环 Γ_r 之任意右理想子环 $\mathfrak{r}$，把有限和 $\sum a_i t_i$（$a_i \in \mathfrak{r}$，$t_i \in V_0^r$）之全体記作 $\mathfrak{r}(V_0^r)$，則 $\mathfrak{r}(V_0^r)$ 是 V_0^r 的 $\mathfrak{g}$-不变子空間。

如果把形式为 $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (\sigma t, \varphi) \cdot \sigma$ $(t \in V_0^r, \varphi \in V_r^0)$ 的元素所架成的 Γ_r 之子空間記作 $\tilde{\Gamma}_r$ 的話[3]，則有

(1) 对于任意的 $\mathfrak{g}$-不变子空間 $U (\subset V_0^r)$，满足

$$U = \mathfrak{r}(V_0^r), \ \mathfrak{r} \subset \tilde{\Gamma}_r$$

的 Γ_r 之右理想子环 $\mathfrak{r}$ 只有一个，这个 $\mathfrak{r}$ 記为 $\mathfrak{r} = {}^bU$。

(2) 对于 Γ_r 之右理想子环 $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$，如 $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3 \subset \tilde{\Gamma}_r$ 时，則

$$\mathfrak{r}_1 \supset \mathfrak{r}_2 \rightleftarrows \mathfrak{r}_1(V_0^r) \supset \mathfrak{r}_2(V_0^r),$$

$$\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_3 \rightleftarrows \mathfrak{r}_1(V_0^r) + \mathfrak{r}_2(V_0^r) = \mathfrak{r}_3(V_0^r).$$

(3) 对于以上的 $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$，如要 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{r}_i(V_0^r)$ 上的表現互相等价，

---

[1],[2] 参考 H. Weyl，书末文献[9]或《代数学》。

[3] 以 $(\sigma t, \varphi)$ 表示 r 次逆变張量 σt 与 r 次协变張量 φ 之内积（亦卽，經縮約手續产生的数量）。$\tilde{\Gamma}_r$ 构成 Γ_r 的两側理想子环。

則其必要与充分的条件是必須存在由 $\mathfrak{r}_1$ 投向 $\mathfrak{r}_2$ 上的一对一的綫性映射 φ，且使 $\varphi(AB)=\varphi(A)B\,(A\in\mathfrak{r}_1, B\in\Gamma_r)$（这时写成 $\mathfrak{r}_1\approx\mathfrak{r}_2$，称 $\mathfrak{r}_1$ 与 $\mathfrak{r}_2$ 作为右理想子环是同构的）。

从这个定理知道，如果把 $\tilde{\Gamma}_r$ 分解为既約的右理想子环之直和

$$\tilde{\Gamma}_r=\mathfrak{r}_1+\cdots+\mathfrak{r}_p \tag{36.2}$$

（$\tilde{\Gamma}_r$ 之既約右理想子环也是 Γ_r 之既約右理想子环），則 V_0^r 分解成 $\mathfrak{g}$-不変的既約子空間 $\mathfrak{r}_i(V_0^r)$ 之直和

$$V_0^r=\mathfrak{r}_1(V_0^r)+\cdots+\mathfrak{r}_p(V_0^r). \tag{36.3}$$

根据有限群的理論，我們知道了分解(36.2)的可能性以及分解成(36.2)的具体方法。而且还知道，Γ_r 之既約右理想子环和按照下述方式获得的典型对象是同构的❶。

首先，解释一下 Young 图形。如同以下的图形

T:

$f_1=5$	1	2	3	4	5
$f_2=3$	6	7	8		
$f_3=3$	9	10	11		
$f_4=2$	12	13			

（$r=13$ 的情况）

那样，r 个正方形合并組成的对象記作 T，左边排齐，下面一行的正方形个数不多于上面一行的正方形个数，排成象琴上的鍵盘一样。在 T 的各正方形里任意地記上 $1,\cdots,r$ 个数字❷。T 有 k 行，各行之长为 $f_1,\cdots,f_k$ 时，則称 T 之型式为 $(f_1,\cdots,f_k)$。这些个 f 满足 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_k>0, f_1+\cdots+f_k=r$。$T$ 的各行（或各列）中的数字間因代換而成的置換令为 $\sigma\in\mathfrak{S}_r$，这些个置換所組成的子群記作 $\mathfrak{R}_T$（或 $\mathfrak{L}_T$），以

$$a_T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{R}_T}\sigma,\quad b_T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{L}_T}\varepsilon_\sigma\cdot\sigma\quad(\varepsilon_\sigma \text{ 是 } \sigma \text{ 之符号})。$$

---

❶ 本丛书弥永、杉浦：《代数学》。

❷ 如果用《代数学》里的說法，則称为"盘"。

由 $e_T=b_Ta_T\in\Gamma_r$ 規定的張量运算子 e_T 称为对应于 T 的 **Young 运算子**。$e_Te_T=\mu e_T$,这里 μ 是自然数,而且为 $r!$ 之約数。

例1 $T=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&\cdots&r\\\hline\end{array}$ $(k=1, f_1=r)$.

$e_T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\sigma$ 是張量之对称化运算子的 $r!$ 倍: $e_T(V_0^r)=S_0^r$(对称張量空間), $e_Te_T=r!e_T$.

例2 $k=r, f_1=\cdots=f_k=1$ 时, T 的图形如右。$e_T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\varepsilon_\sigma\cdot\sigma$, $\frac{1}{r!}e_T$ 是張量之反称化运算子: $e_T(V_0^r)=A_0^r$. $e_Te_T=r!e_T$.

$$T=\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline \vdots\\\hline 3\\\hline\end{array}$$

例3 $r=3, k=2, f_1=2, f_2=1$ 时, $\mathfrak{S}_3$ 之元素以巡回置換表示:

$$T=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$e_T=(1-(13))\cdot(1+(12)).$$

容易知道, $e_Te_T=3e_T$.

定理2 [1] (1) Γ_r 之各旣約右理想子环与 $e_T\Gamma_r$ 形式的右理想子环同构。

(2) 对于 Young 图形 T, $e_T\Gamma_r$ 一定是 Γ_r 之旣約右理想子环。而且

$$e_T\Gamma_r\subset\tilde{\Gamma}_r \rightleftarrows T \text{ 之行数 } k\leqslant n+1.$$

(3) 如果 Young 图形 T, T' 的型式是 $(f_1, \cdots, f_k)$, $(f_1', \cdots, f_{k'}')$, 則

$$e_T\Gamma_r\approx e_{T'}\Gamma_r \rightleftarrows k=k', f_1=f_1', \cdots, f_k=f_k'.$$

(4) 在 $\tilde{\Gamma}_r=\mathfrak{r}_1+\cdots+\mathfrak{r}_p$ (按照右理想子环的直和分解)里滿足 $\mathfrak{r}_j\approx e_T\Gamma_r$ 的 $\mathfrak{r}_j$ 之个数 j 記作 g, 則 $g\mu=r!$. 这里的 μ 是滿足 $e_Te_T=\mu e_T$ 的自然数。

根据这一定理,行数在 $n+1$ 以内的各种不同型式的 Young 图形之全部記成 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 时, 由于 $(e_{T_i}\Gamma_r)(V_0^r)=e_{T_i}(V_0^r)$, 所以 V_0^r 分解为旣約 $\mathfrak{g}$-不变子空間, 設

$$V_0^r=U_1+\cdots+U_p \quad (U_i=\mathfrak{r}_i(V_0^r)).$$

[1] 証明見《代数学》或书末文献 [9]。

各 U_j 和 $e_{T_1}(V_0^r),\cdots,e_{T_s}(V_0^r)$ 中的某一个同构，而且以 $e_{T_i}e_{T_i}=\mu_i e_{T_i}$，$r!=g_i\mu_i$，则使 $U_j\approx e_{T_i}(V_0^r)$(等价)的 U_j 之个数等于 g_i，亦即 $e_{T_i}(V_0^r)$ 是 V_0^r 之 g_i 重既約成分。例如說，在例 1，2 的 T 的情况下，因 $g=1$，$\mu=r!$，所以 A_0^r 和 S_0^r 是一重的既約成分。现在更对 Young 图形 T，求 g 在 $e_T(V_0^r)$ 上之既約表現的最高权。

1	3
2	

为了簡单起見，設 $r=3$。T 的式样如左图所示 (一般情况也是同样的)。因 $e_T=(1-(12))(1+(13))$，对于各 $x, y, z\in V$，利用

$$(1+(13))(x\otimes y\otimes z)=x\otimes y\otimes z+z\otimes y\otimes x$$
$$=(x+z)\otimes y\otimes(x+z)-x\otimes y\otimes x-z\otimes y\otimes z,$$

知 $(1+(13))V_0^3$ 是由 $x\otimes y\otimes x$ 这样形式的張量所架成的。从而，根据

$$(1-(12))(x\otimes y\otimes x)=x\otimes y\otimes x-y\otimes x\otimes x=2(x\wedge y)\otimes x,$$

$e_T(V_0^3)$ 是由 $(x\wedge y)\otimes x$ 这样形式的元素所架成的。另一方面，与 λ_i 有关的特征向量設为 $x_i\in V$，包含 $(x_1\wedge x_2)\otimes x_1$ 的最小 g-不变子空間設为 U，那么，我們知道❶ $U=e_T(V_0^3)$。因而，$e_T(V_0^3)$ 之最高权是 $2\lambda_1+\lambda_2$，亦即具有最高权 $\Lambda_1+\Lambda_2$。完全同样地，对于一般的 T，如左图所示，

$T=$

1	$k+1$	$l+1$	⋮	…	r
2	⋮	⋮	⋮		
3	⋮	m			
⋮	l				
k					

$e_T(V_0^r)$ 是由

$$\overset{1}{x}\otimes\overset{2}{y}\otimes\cdots\otimes\overset{k}{z}\otimes\overset{k+1}{x}\otimes\overset{k+2}{y}\otimes\cdots\otimes\overset{r}{x}$$

的元素組成的，因而，$e_T(V_0^r)$ 是由形式如

$$(x\wedge y\wedge\cdots\wedge z)\otimes(x\wedge y\wedge\cdots)\otimes\cdots\otimes x$$

的元素构成的(如果 $k>n+1=\dim V$，则 $e_T(V_0^r)=0$)。另一方面，包含 $(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_k)\otimes(x_1\wedge x_2\wedge\cdots)\otimes\cdots\otimes x_1$ 的最小 g-不变子

---

❶ 容易知道 U 是由 $(P_{x_1}\wedge P_{x_2})\wedge P_{x_1}$ ($P\in SL(n+1, C)$)，亦即，由 $(x\wedge y)\otimes x$ ($x, y\in V$) 所架成的。此外，因 $(x_1\wedge x_2)\otimes x_1$ 是賜权(dominant weight) $2\lambda_1+\lambda_2=\Lambda_1+\Lambda_2$ 的特征向量，所以 U 是既約的。

空間也和上述一样，是由同样形式的元素架成的。如果 T 之型式为 $f_1, \cdots, f_k$，則

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k) \otimes (x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots) \otimes \cdots \otimes x_1$$

是属于强权 $f_1\lambda_1 + f_2\lambda_2 + \cdots + f_k\lambda_k$ 的。从而，$e_T(V_0^r)$ 之最高权是 $f_1\lambda_1 + \cdots + f_k\lambda_k$。这样就得到下面的定理。

定理 3 Young 图形 T 的型式为 $f_1, \cdots, f_k, r = f_1 + \cdots + f_k$ 时，在对应于 T 的 V_0^r 之既約 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$-不变子空間 $e_T(V_0^r)$ 上作 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 的表現，則最高权是 $f_1\lambda_1 + \cdots + f_k\lambda_k$。但这里的 k 仅限于 $k \leqslant n+1$。

注意 1 以 $f_i - f_{i+1} = p_i$ $(i=1, \cdots, k-1)$，$f_k = p_k$ $(k=n+1$ 时，設 $p_{n+1}=0)$，則有

$$f_1\lambda_1 + \cdots + f_k\lambda_k = p_1\Lambda_1 + p_2\Lambda_2 + \cdots + p_k\Lambda_k.$$

因此，要求得 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 的某种既約表現，只要考虑对应于 Young 图形的既約表現就可以了。在張量的次数不同时，两个不同型式的 Young 图形 T 与 T' 可能給出 $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ 的等价表現。那就是說，当

T 之型式为 $f_1, \cdots, f_k$，

T' 之型式为 $f'_1, \cdots, f'_k$

时，$f_i - f_{i+1} = f'_i - f'_{i+1}$ $(i=1, \cdots, k-1)$ 成立。

2. $B_n \approx \mathfrak{o}(2n+1, C)$

恒等表現 ρ 之权是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n$。安排 $\mathfrak{h}^*$ 之順序使

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0.$$

和 §36.1 的情况一样，以

$$\Lambda_r = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \quad (r=1, \cdots, n-1)$$

作为最高权的既約表現，可以从在 $V = C^{2n+1}$ 上的 r 維反称張量空間 $A_0^r (\subset V_0^r)$ 分解为既約成分而得到。事实上，我們曉得 A_0^r 是既約的。如果 $r+s=2n+1$，則 A_0^r 上之表現 $\bar{\rho}_0^r$ 和 A_0^s 上之表現 $\bar{\rho}_0^s$ 是互相等价的。ρ 之逆步表現 $-{}^t\rho = \rho^*$，由于 $\rho^* \approx \rho$，所以 $(\bar{\rho}_0^r)^* \approx \bar{\rho}_0^r$

成立。$\bar{\rho}_0^r$ 之次数是 ${}_{2n+1}C_r(1\leqslant r\leqslant n-1)$。

以 $\Lambda_n=\frac{1}{2}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$ 作为最高权的既約表現，也就是所謂的旋表現，其次数是 2^n，它的构成并不簡单，这一点留在后面再說（參照 §37）。

A_0^n 上的既約表現 $\bar{\rho}_0^n$ 之最高权是 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=2\Lambda_n$，它可以分解为两个旋表現之張量积。

$\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 的既約表現之最高权設为 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n(m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n\geqslant 0)$，如果 $m_1,\cdots,m_n$ 全是整数，则从 $\bar{\rho}_0^1(=\rho)$，$\bar{\rho}_0^2,\cdots,\bar{\rho}_0^n$ 可以构成在張量空間中的既約表現，如果 $m_1,\cdots,m_n$ 是半整数时，假如不利用旋表現，则不能构成 Λ。

注意 2　特别由于 $\mathfrak{o}(3, C)\approx\mathfrak{sl}(2, C)$，因此 $\mathfrak{o}(3, C)$ 之既約表現可以归結为 §36.1 的情况（參照 §37）。

3. $C_n=\mathfrak{sp}(n, C)$

恒等表現 ρ 之权是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$。$\rho$ 也和逆歩表現 ρ^* 等价。安排 $\mathfrak{h}^*$ 的順序，使 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0$。則和 §36.1 的情况一样，以

$$\Lambda_r=\lambda_1+\cdots+\lambda_r\quad(r=1,2,\cdots,n)$$

作为最高权的既約表現，可以当做是 $V=C^{2n}$ 上的 r 維反称張量空間 A_0^r 之既約成分而得到。这时，A_0^r $(r=2,\cdots,n)$ 不是既約的了。例如說，A_0^2 分解为以 Λ_2 作为最高权的既約不变子空間与权为 0 的 1 維不变子空間之直和。已給定最高权 $\Lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$ $(m_1,\cdots,m_n$ 是整数，且 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n>0)$ 的既約表現之构成，可以由張量空間之分解而得到。

4. $D_n\approx\mathfrak{o}(2n, C)$

恒等表現 ρ 之权是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$，安排 $\mathfrak{h}^*$ 的順序，使 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0$。和 §36.2 同样，以

$$\Lambda_r=\lambda_1+\cdots+\lambda_r \quad (r=1, 2, \cdots, n-2)$$

作为最高权的旣約表現，可以从用 $V=C^{2n}$ 上的 r 維反称張量空間 A_0^r 当作表現空間而得到❶。因而，它的次数是 ${}_{2n}C_r$ $(r=1, 2, \cdots, n-2)$．Λ_{n-1}, Λ_n 是旋(spin) 表現，其次数对于任何一个都是 2^{n-1}(参照 §37)。

§37 旋 表 現

1．Clifford 代数(亦称多元环)

象以下那样作出复数体 C 上的 2^m 維代数 $\boldsymbol{C}$．首先，$\boldsymbol{C}$ 之基底是形式如

$$1,\ x_i(1\leqslant i\leqslant m),\ x_ix_j(1\leqslant i<j\leqslant m),$$
$$x_ix_jx_k(1\leqslant i<j<k\leqslant m),\ \cdots,\ x_1\cdots x_m$$

的 2^m 个元素。如果 1 是单位元素，則其乘法由

$$x_i^2=-1,\quad x_ix_j=-x_jx_i \quad (i\neq j)$$

規定。例如說 i, j, k 互不相同时，

$$(x_ix_jx_k)x_i=-x_jx_k$$

等等。容易知道，在 $\boldsymbol{C}$ 上結合律是成立的。这个 $\boldsymbol{C}$ 称为复数体上的 **Clifford 代数**。(同样，在实数体上也可以定义 Clifford 代数。)

2．$\mathfrak{o}(m, C)$ 在 Clifford 代数上的表現

$\boldsymbol{C}$ 的元素 a 与 b 之交换子积 $[a, b]$ 由 $[a, b]=ab-ba$ 来定义，

---

❶ $\rho\approx\rho^*$ (逆步表現)对于 A_0^r 上的表現 $\bar{\rho}_0^r$，如果 $r+s=2n$，則 $\bar{\rho}_0^r\approx\bar{\rho}_0^s\approx(\bar{\rho}_0^s)^*$．如果 $r\neq n$，則 $\bar{\rho}_0^r$ 是旣約的，$\bar{\rho}_0^n$ 分解为二个非同値的旣約成分。取 $V=C^{2n}$ 的正規直交系 $x_1, \cdots, x_{2n}$，由 A_0^n 投到 A_0^n 的綫性映射 $*$ 以 $*(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_n})=x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_n}$ 来定义(但这里的 $j_1,\cdots,j_n$ 是使 $(i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n)$ 采取 $(1,\cdots,n,\cdots,2n)$ 之偶序列而决定的)。因此，若以 $\sigma=i^n*$，則由于 $**=(-1)^n$ 而有 $\sigma^2=1$．σ 之値 ±1 的特征空間設为 U_1, U_2，它們关于 $\mathfrak{o}(2n, C)$ 是不变的，$A_0^n=U_1+U_2$(直和)，U_1 与 U_2 是旣約的。

$$U_1=\frac{1+\sigma}{2}A_0^n,\quad U_2=\frac{1-\sigma}{2}A_0^n.$$

C 就成为复数体 C 上的 2^n 維 Lie 环。如果由 x_ix_j $(i<j)$ 所架成的 C 之 $\frac{1}{2}m(m-1)$ 維子空間記作 $\mathfrak{g}$，那末容易知道，作为 Lie 环的 $\mathfrak{g}$ 是 C 的子环，这就是說，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$. 其实，$\mathfrak{g}\approx\mathfrak{o}(m,C)$，事实上，由 $x_1,\cdots,x_m$ 所架成的 C 之 m 維子空間設为 V，对于 $X\in\mathfrak{g}$，C 之綫性映射 $\varphi(X)$ 以

$$\varphi(X)a=Xa-aX\quad(a\in C)$$

定义，那么，φ 是 $\mathfrak{g}$ 在 C 上之表現

$$\begin{aligned}\varphi([X,Y])a&=(XY-YX)a-a(XY-YX)\\&=(\varphi(X)\varphi(Y)-\varphi(Y)\varphi(X))a.\end{aligned}$$

而且 V 是 $\mathfrak{g}$-不变的。实际上，当 $1\leqslant i,j,k\leqslant m$, $i\neq j$ 时，

$$\varphi(x_ix_j)x_k=\begin{cases}0 & (k\neq i,j),\\ 2x_j & (k=i),\\ -2x_i & (k=j).\end{cases}$$

从此式推得，如果把 $\varphi(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 在 V 上导出的綫性映射記作 $\psi(X)\in\mathfrak{gl}(V)$，那么，关于 V 之基底 $x_1,\cdots,x_m$，$\psi(x_ix_j)$ $(i\neq j)$ 之矩陣是 $2(E_{ji}-E_{ij})\in\mathfrak{o}(m,C)$. ($E_{ij}$ 是这样一种矩陣，其 (i,j) 元素是 1，其他元素都是 0.) 从而 $\psi(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{o}(m,C)$. 由于 $\mathfrak{o}(m,C)$ 是由 $E_{ji}-E_{ij}$ 所架成的，所以 $\psi(\mathfrak{g})=\mathfrak{o}(m,C)$. 又因为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{o}(m,C)$ 的維数相等，所以 ψ 是一对一的映射，且在 ψ 之下 $\mathfrak{g}\approx\mathfrak{o}(m,C)$. 由于对应元素是 $x_ix_j\leftrightarrow 2(E_{ji}-E_{ij})$ $(i\neq j)$，因此，在 ψ 之下，$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{o}(m,C)$ 可以看做是同等的。

現在让我們規定 $\mathfrak{g}$ 的(因而也是 $\mathfrak{o}(m,C)$ 的)旋表現。首先，由 C 的元素

$$1;\ x_ix_j\ (i<j);\ x_ix_jx_kx_l(i<j<k<l);\ \cdots,$$
$$x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_{2p}}(i_1<i_2<\cdots<i_{2p});\cdots$$

架成的 C 之子空間記作 C_+，其次由 C 的元素

x_i; $x_ix_jx_k(i<j<k)$; $\cdots$; $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2p-1}}(i_1<\cdots<i_{2p-1})$; $\cdots$

架成的 C 之子空間記成 C_-. $\dim C_+=\dim C_-=2^{m-1}$. 容易知道，$C_+$ 是 C 的子代数。明显地有 $\mathfrak{g}\subset C_+$. 这时，因 m 有奇数或偶数的区别，因此可以分开来討論。

3. $m=2n+1$ (奇数)的情况

C_+ 是和复数体上的 2^n 阶矩陣之全体所成的矩陣环同构的。若把 C_+ 之既約左理想子环中的一个記成 S 的話，$\mathfrak{g}$ 在 S 上的表現 ρ 可以定义为：对于 $X\in\mathfrak{g}$，当由 S 投向 S 的綫性映射 $\rho(X)$ 由

$$\rho(X)a=Xa \quad (a\in S)$$

規定时，ρ 是綫性映射：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(S)$，而且

$$\rho([X,Y])a=(XY-YX)a=(\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X))a,$$

ρ 成为 $\mathfrak{g}$ 在 S 上的表現。事实上，可以証明，S 給出了 $\mathfrak{g}$ 之既約表現，其最高权就是 §35.2 的 B_n 之权 Λ_n. $\mathfrak{o}(2n+1,C)$ 在 S 上的表現，或者，一般和它等价的既約表現称为 $\mathfrak{o}(2n+1,C)$ 的**旋表現** (spin representation)。S 的元素，或者更一般地說，旋表現的表現空間中的元素叫做 $\mathfrak{o}(2n+1,C)$ 的**旋子** (spinor)。旋表現的次数是 n^2.

4. $m=2n$ (偶数)的情况

以 $x_k+\sqrt{-1}x_{k+n}=y_k$, $x_k-\sqrt{-1}x_{k+n}=y'_k$ $(k=1,\cdots,n)$，更以 $f=y'_1\cdots y'_n$. 再把由 $1,y_1,\cdots,y_n$ 生成的 C 之子代数記以 C^N，那么由 f 生成的 C 之左理想子环 Cf 等于 C^Nf，而且对于 Cf 的各个元素 $af(a\in C)$，有 $af=bf$, $b\in C^N$ 这样的 b 唯一地存在着，这桩事实是可以証明的[1]。这时，$\mathfrak{g}$ 在 C^N 上的表現 ρ 可以規定为：对于 $X\in\mathfrak{g}$, $u\in C^N$，由于使 $Xuf=u'f$ 成立的 $u'\in C^N$ 可以唯一确定的緣故，如以 $u'=\rho(X)u$，則 $\rho(X)$ 是由 C^N 投向 C^N 的綫性映射，而 ρ 成为 $\mathfrak{g}$ 在 C^N 上之表現。$\mathfrak{o}(2n,C)$ 在 C^N 上的表現，或一般

[1] 証明可以参考书末文献表[10]。

地讲，与它等价的表現称为 $\mathfrak{o}(2n, C)$ 之**旋表現**。C^N 的元素，或者一般地說，旋表現之表現空間 S 之元素叫做 $\mathfrak{o}(2n, C)$ 的**旋子**。旋表現之次数是 2^n.

这时和 m 是奇数的情况不同，这里的旋表現不是既約的了。如果以 $C^N \cap C_+ = C_+^N$, $C^N \cap C_- = C_-^N$, 则 C_+^N 和 C_-^N 是表現空間 C^N 的 $\mathfrak{g}$-不变子空間，而 C^N 可以分解为 $C^N = C_+^N + C_-^N$ 这样的直和。但 $\mathfrak{g}$ 在 C_+^N 与 C_-^N 上的表現是既約的，其最高权是 § 35.4 里 D_n 之权 Λ_n, Λ_{n-1}。$\mathfrak{o}(2n, C)$ 在 C_+^N 或 C_-^N 上之表現，或一般地讲，与此等价的既約表現，分別叫做**偶的或奇的半旋表現** (even or odd half-spin representation)。C_+^N 和 C_-^N 的元素，或一般地讲，偶或奇的半旋表現之表現空間 S_p 与 S_i 的元素分別叫做**偶的或奇的半旋子**。任何一种半旋表現之次数都是 2^{n-1}.

5. $SO(m)$ 之二价表現与一价表現

$\mathfrak{o}(2n, C)$ 之半旋表現或 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 之旋表現如限制在 $\mathfrak{o}(2n)$ 和 $\mathfrak{o}(2n+1)$ 上时，則得到在实数体上 Lie 环 $\mathfrak{o}(2n)$ 和 $\mathfrak{o}(2n+1)$ 之既約复数表現。这种表現不能引出 $SO(m)$ ($m=2n$ 或 $m=2n+1$) 之一价表現。若更严格地說，那就是，无論怎样取 $SO(m)$ 的一价表現，半旋表現或旋表現都不能当作它的微分而得出。今設 $m \geqslant 3$，和 $SO(m)$ 局部同构的单連通的連通 Lie 群記成 $\mathrm{Spin}(m)$，称 $\mathrm{Spin}(m)$ 为附属于 $SO(m)$ 的**旋子群**。$\mathfrak{o}(m)$ 的任何一个表現 ρ 都可以引导出 $\mathrm{Spin}(m)$ 的某一个一价表現 P，换言之，ρ 是 $\mathrm{Spin}(m)$ 的某一个一价表現之微分，即 $dP=\rho$。再者，被包含于 $\mathrm{Spin}(m)$ 中心里的二位的群 Z 是存在的，且有 $\mathrm{Spin}(m)/Z \approx SO(m)$。这里如果 P 把 Z 的每一个元素都映射到恒等变换 (单位矩陣) 上，則 P 引导出 $SO(m)$ 的一价表現 P_0, $dP_0=\rho$。亦即，这时 ρ 引出 $SO(m)$ 的一价表現。但是，如果 P 不把 Z 的每个元素映射到恒等变换上去，則 P 可以看成是 $SO(m)$ 之二价表現。这时，它不能

引出一价表现。因此，半旋表现或旋表现导引出 $SO(m)$ 之二价表现。

6. 例 $\mathfrak{o}(3, C)$，$\mathfrak{o}(3)$之旋表现（$m=3, n=1$ 的情况）

Clifford 代数 C 是由 $1, x_1, x_2, x_3$ 生成的，其維数是 $2^3=8$，§37.2 之 $\mathfrak{g}$ 是由

$$i=x_2x_3,\quad j=x_3x_1,\quad k=x_1x_2$$

架成的。C_+ 是由 $1, i, j, k$ 架成的 4 維代数。由于

$$(1)\quad i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=k,\ jk=i,\ ki=j,\ ij=-ji,$$
$$kj=-jk,\ ik=-ki,$$

所以 C_+ 是在实数体之 4 元数体的基础上，系数范圍由实数扩張到复数体后所成的东西。现在說明 C_+ 成为矩陣环。設 C_+ 之基底为 $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$，如果使

$$(2)\quad e_{11}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1}\,k),\ e_{12}=\frac{1}{2}(\sqrt{-1}\,i-j),$$
$$e_{21}=\frac{1}{2}(j+\sqrt{-1}\,i),\ e_{22}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1}\,k),$$

则 $e_{ij}e_{pq}=\delta_{jp}e_{iq}$，$C_+$ 就成为矩陣环。以 e_{11}, e_{21} 所架成的东西作为 C_+ 之既約左理想子环 S，在 S 上把 $\mathfrak{g}$ 之表现写作 $\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}$（按照习惯的写法），关于 S 之基底 e_{11}, e_{21} 的 $\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(i), \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(j), \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(k)$ 之矩陣是容易計算出来的。例如从 $ie_{11}=-\sqrt{-1}\,e_{21}, ie_{21}=-\sqrt{-1}\,e_{11}$，就得

$$(3)\quad \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(i)=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(j)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(k)=\begin{pmatrix}-\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}.$$

对应于 i, j, k 的 $\mathfrak{o}(3, C)$之元素是

$$(4)\quad i\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&2&0\end{pmatrix},\ j\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix},\ k\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

这些东西也組成 $\mathfrak{o}(3)$ 之基底。(把 $\mathfrak{o}(3)$ 考虑成 xyz 空間之旋轉群 $SO(3)$ 的无穷小变换之集合时，i, j, k 分别表示圍繞 x, y, z 軸的无穷小旋轉。)今以

$$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1}\,i)=S_1,\quad \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1}\,j)=S_2,\quad \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1}\,k)=S_3,$$

则 S_1, S_2, S_3 是 Hermite 矩陣：

$$S_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

称它們为 **Pauli 之旋矩陣**。

試求 $\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}$ 之最高权。如 §37.2 所說的那样，变数变换之矩陣 T 把 $\mathfrak{o}(3,C)$ 变为 $\mathfrak{g}(K)$：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}a&\sqrt{2}b\\-\sqrt{2}b&\lambda&0\\-\sqrt{2}a&0&-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&a+b&\sqrt{-1}(a-b)\\-a-b&0&\sqrt{-1}\lambda\\\sqrt{-1}(b-a)&-\sqrt{-1}\lambda&0\end{bmatrix},$$

对于 $\mathfrak{g}(K)$ 之 Cartan 子环 $\mathfrak{h}$ 的元素 $H(\lambda)$，有 $\mathfrak{o}(3,C)$ 的元素 $-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\lambda i\,(=H'(\lambda))$ 与它对应。因此，$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(H'(\lambda))$ 之矩陣从(3)推知是

$$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(H'(\lambda))=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\lambda\\\lambda&0\end{pmatrix}.$$

于是，其特征値(＝权)是 $\pm\frac{\lambda}{2}$ ❶. 按照 $\lambda>0$ 安排 $\mathfrak{h}^*$ 之順序时，

---

❶ 特征向量是 $e_{11}+e_{21}$ 与 $e_{11}-e_{21}$. 其次，$\mathfrak{o}(4,C)$ 之 C_+^N 与 C_-^N 上的既約表現的权可以同样地計算出，它們各为 $\pm\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$；$\pm\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$.

其最高权是 $\frac{\lambda}{2}$。这就是說，$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}$ 是以 §35.2 里的 Λ_n $(n=1)$ 作为最高权的既約表現。因而，$\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathfrak{o}(3,C)$ 的(唯一的)基本的表現。

$\mathfrak{o}(3,C)$ 之任意既約表現的最高权是 $\nu\cdot\frac{\lambda}{2}$ (ν 是整数，$\nu\geqslant 0$)，这个既約表現写做 $\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$ ($\nu=0$ 时，$\mathfrak{d}_0$ 是一次的零表現)。这样做的話，$\mathfrak{o}(3,C)$ 所有的既約表現可以用

$$\mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{d}_{\frac{1}{2}},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_{1\frac{1}{2}},\ \mathfrak{d}_2,\ \cdots$$

表示出。$\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$ 应从 $\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}$ 之表現空間 S 的 ν 次張量积 $S\otimes\cdots\otimes S$ (ν 个)分解为既約成分而得到。也就是說，当把属于 $\mathfrak{d}_{\frac{1}{2}}(H'(\lambda))$ 之特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量 $e_{11}-e_{21}$ 記作 e，把包含 $e\otimes\cdots\otimes e$ 的 $S\otimes\cdots\otimes S$ 之最小 $\mathfrak{g}$-不变子空間記作 ε 时，ε 上的表現就是所求的 $\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$。$\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$ 之次数实际上可証明为 $\nu+1$。例如說，$\mathfrak{d}_1$ 是 $\mathfrak{o}(3,C)$ 的元素对应于其自身的表現。一般，只有当 ν 是偶数时，$\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$ 才引出 $SO(3)$ 的一价表現。如 ν 是奇数，对于 Spin(3) 引出一价表現，但对于 $SO(3)$，则引出二价表現。

利用各种群，可以使 Spin(3) 具体化。$SU(2)\approx$ Spin(3) 就是其一例。还有，由实数体上之 4 元数体 Q 的元素 $\omega=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数，而且 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1$) 所組成的 Q 中之乘法群 Ω 已决定了 Spin(3)。实际上，Ω 是与三維球面拓扑同构的单連通群，对于 $\omega\in\Omega$，如果有 i,j,k 所架成的三維 Euclid 空間 R^3 (模为 $|\beta i+\gamma j+\delta k|=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$) 的直交变換 $\xi\to\omega\xi\omega^{-1}$ 与它对应的話，就能得到由 Ω 投向 $SO(3)$ 上的同态对应 χ。χ 是局部同态的，χ 之核是由 Ω 的元素 1 与 -1 所組成的二位群。这組成了 Ω 之中心 Z，而 $\Omega/Z\approx SO(3)$。对于 $\Omega\ni\omega=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$，如果有二次矩陣 $U_\omega=\alpha I-\sqrt{-1}(\beta S_1+\gamma S_2+\delta S_3)$ (S_1,S_2,S_3 是 Pauli 的旋矩陣) 和它对应，则 $\omega\to U_\omega$ 就决定了 $\Omega\approx SU(2)$，

这是容易知道的。

由于 $SU(2)$ 是 $SL(2,C)$ 之致密形，因此，如能求得 $SL(2,C)$ 或 $\mathfrak{sl}(2,C)$ 的所有既約表現，則 $SU(2)$ 所有的既約表現（从而，$\mathfrak{o}(3)$ 所有的既約表現）是可以求得的。因而，$\mathfrak{sl}(2,C)$ 之所有的既約表現对应着一个 Young 图形(§ 36.1)。

使 $\mathfrak{sl}(2,C)\approx\mathfrak{o}(3,C)$ 成立之同构对应，由基底間的对应

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{-1}\\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1} & 1\\ -\sqrt{-1} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1} & -1\\ -\sqrt{-1} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

决定出。从此知道，要求对应于 $\mathfrak{o}(3,C)$ 的既約表現 $\mathfrak{d}_{\frac{\nu}{2}}$ 的 $\mathfrak{sl}(2,C)$ 之既約表現，根据簡单計算，它是对应于 | 1 | 2 | .. | ... | .. | ... | ν | Young 图形的。这就是說，它是利用 ν 次的对称張量空間可以实現出的表現（这一点如果从基本的权去考虑也可以知道）。

最后，略去証明而举出如下的重要分解公式。

定理 1 $\mathfrak{d}_j\otimes\mathfrak{d}_{j'}=\mathfrak{d}_{j+j'}+\mathfrak{d}_{j+j'-1}+\cdots+\mathfrak{d}_{|j-j'|}$ （右边表示表現之直和）。

例如說，
$$\mathfrak{d}_1\otimes\mathfrak{d}_{\frac{5}{2}}=\mathfrak{d}_{\frac{7}{2}}+\mathfrak{d}_{\frac{5}{2}}+\mathfrak{d}_{\frac{3}{2}}.$$

作为 $\mathfrak{sl}(2,C)$ 之表現来进行計算是比較容易的。詳細証明可以参考书末文献表[13]。文献表里的[8]，[12]，[14] 也有一些內容可以参考。

参考文献

由于正文中对于指标理論，不变测度(Haar measure)之具体形式，不变式；Lie 群之拓扑，同次空間 G/H 等重要問題，有些差不多完全沒有提到，而从第 7 章开始，差不多又把所有証明全都省略掉，为了便于讀者进一步钻研，特提供以下几种参考文献。

第1章和第2章

[1] C. Chevalley: Theory of Lie groups, I (Princeton, 1946).

这是一本写得很抽象的书，如果不是一面讀，一面自己用具体的例子来計算的話，讀起来也許是困难的。然而，这本书对于历来理論方面不明确之处較多的 Lie 群論，却在基础理論上給予比較清晰的叙述。

第3章至第7章

[2] C. Chevalley: Théorie des groupes de Lie, II (1951), III (1955) (Hermann, Paris).

[3] Séminaire "Sophus Lie", Ecole Normale Supérieure (1954～1955).

[4] 松島與三：リー环論，現代数学讲座(共立社，1957).

若仅求对于一般理論的了解，那末只要讀这三本书的有关内容就够了。特别对于初学者来說，可以从[4]讀起。

[5] Pontrjagin: Topological groups (Princeton) 及其改訂版，最近有日譯本出版(杉浦光夫，柴岡泰光譯：連續群論，岩波)(譯者注：尙有中譯本，曹錫华譯：連續群論，科学出版社)。

关于 §35 以后討論 A_n, B_n, C_n, D_n 之詳細性质的有如下的古典著作。

[6] E. Cartan: Oeuvres complètes, Partie I, Vol. 1 et 2 (1952).

[7] H. Weyl: Theorie der Darstellung kontinuierlicher half-einfacher Gruppen, I, II, III, Math. Zeitschr. 23, 24 (1924～1925).

[8] H. Weyl: The structure and representation of continuous groups, Lecture note (1934～1935).

[9] H. Weyl: The Classical Groups, their invariants and representations (Princeton, 1946).

关于旋表現的詳細內容方面有

[10] C. Chevalley: Algebraic theory of spinors.

[11] E. Cartan: Leçons sur la théorie des Spineurs, I (Actualités sci.

et ind. 643) (Hermann, Paris, 1938).

对于那些不进行具体計算,而讀起来又感到困难的讀者来讲,也許从[11]讀起是較好的。

其次,关于三維空間之旋轉群的表現論,有

[12] H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechnik (Hirzel, 1931)——山内恭彦譯: 群論与量子力学(裳华房).

[13] 山内恭彦: 回轉群とその表現(岩波, 1957).

[14] 犬井鉄郎, 柳川禎章: 群表現と原子及び分子(裳华房,1949).

关于指标理論,除在[1], [3], [4], [6], [7], [8], [9]里間或出現外,还有

[15] 小平邦彦: 単純リー群について (科学) vol. 16, No. 3 (1946) 可供参考。

校 后 記

管 紀 文

Lie 群和 Lie 代数❶及其表示的理論是很重要的一个数学領域，它与微分方程、解析力学、微分几何、代数拓扑、泛函分析、量子力学和原子結构等等方面有着密切的联系。到了今天，Lie 群論已經是一門有着比較长远历史的学科了。近年来我国科学工作者也进行了不少有关的工作，获得了若干成果，但是，系統地介紹有关 Lie 群論方面的专著，在国内还极其鮮見。因此本书的出版是有益的。

Lie 群論就是古典的連續群論，其奠基人是挪威数学家 Sophus Lie (1842～1899)。

群的概念首先是由法国青年数学家 Évariste Galois (1811～1832) 在研究用根式来解代数方程时引进的。Galois 揭露了置換群的結构特点与求解代数方程問題的本质联系。这个突出的成就显示了群論的深刻的意义和重大的作用。Lie 想把 Galois 的理論推广来解微分方程，于是去探討一种新型的、无限的群——他称之为連續变换群。Lie 用毕生精力从事于这种群及其不变量理論的研究，同样証明了这种群对于几何学、力学和微分方程等的重大意义。这些工作的結果，在他的学生 F. Engel 和 G. Scheffers 的协助下，已被編纂成下列几部巨著：

Lie S. 和 Engel F.: Theorie der Transformationsgruppen.

Lie S. 和 Scheffers G.: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit

---

❶ Lie 代数即 Lie Algebra，本书遵从原著，譯为 Lie 环。"表示"譯为"表現"。

bekannten infinitesimalen Transformationen.

Lie S. 和 Scheffers G.: Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen.

Lie S. 和 Scheffers G: Geometrie der Berührungstransformationen.

Lie 群在几何学中有着本质上的意义。Camille Jordan 和 Felix Klein 指出，每一門几何(初等的，仿射的，射影的以及拓扑学等等)，实质上都是关于某种相当的連續群的不变量的科学。由于許多学者，特别是 Wilhelm Killing 和 Élie Cartan 的努力，到了二十世紀初叶，Lie 群的理論已相当充分地建立起来了。关于 Lie 群与微分几何的联系方面，最近严志达著《李群和微分几何》一书可供参閱。

在 Lie 群理論中，特别突出地体現着代数、几何、分析諸数学分支的相互联系与相互滲透。Lie 群这一概念本身就是群、拓扑空間和流形等三个概念的有机結合，这就决定了 Lie 群理論的深刻性及其联系与应用的广泛性。

Lie 群的綫性表示理論也是 Lie 群論的重要研究方面，这方面的研究对于近代物理学的发展有着重要意义。在有限群的情形，这一理論于十九世紀末到二十世紀初就已建立起来。以后，許多学者把它推广到 Lie 群的情形，特别是 Adolph Hurwitz 引用了积分的方法，象在有限群情形下对所有群元素的求和一样，初步奠定了 Lie 群的表示論。継后 I. Schur 和 H. Weyl 等又进一步推进了理論的发展。在积分方法中，測度理論具有重要的意义。A. Haar 証明了适合第二可数公理的局部紧致群的不变測度存在的定理，使著名的 David Hilbert 第五問題在紧致群及可换群的情形分别由 J. V. Neumann 和 Л. С. Понтрягин 获得了解决。关于这方面，以后有很多人(H. Cartan, C. Chevalley, Bochner, H. Г. Чеботарёв 等)进行着大量的工作，涉及到許多更加深刻的問題，且

与泛函分析相关。Lie 群的綫性表示的可能性問題，在局部的情形已由 И.Д.Адо 肯定了；至于全局的情形，也有 E. Cartan, Birkhoff, Witt 等人做了一些工作；А.И. Мальцев 曾得到了一个充要条件。Lie 群及其表示理論还与特殊函数、多复变解析函数理論有很密切的联系。近年来，苏联数学界（И.М. Гальфанд, М.А. Наймарк）研究了在 Hilbert 空間 U 变换群里的表示理論，这理論对分析与物理尤有特殊意义。

Lie 群的古典成果，是依賴于变换的解析性的。1900 年 David Hilbert 在巴黎的国际数学家代表大会上提出了著名的 23 个“数学問題”，其中之一就是 Lie 群中的解析性是否必要的問題——上面已經提到过的第五問題❶。近代的連續群概念抛弃了 Lie 群的解析性要求，使之更为抽象。David van Dantzig 曾举出連續群但非 Lie 群的例子。有关連續群方面，讀者可以参閱 Понтрягин 的名著“連續群”。Понтрягин 于三十年代之始就得到了这方面的重要成果。他第一次明晰地綜述了这个理論。

岩堀长庆（Iwahori, N）所著本书，相当充分地闡述了 Lie 群理論。較之国际上若干現行的 Lie 群专著，本书有例証較多等特点。原书中所引的参考书目，有些是日文书籍，考虑到讀者查索的方便，特在个别地方补充了一些国内易于找到的中文参考书。此外，Lie 群理論的若干超出本书范圍的有关部分，譯者序中已經作了頗为詳細的說明，于此不拟冗述。

关于 Lie 群方面的参考书，除前面已提到的 Lie S. 和 Engel F. 与 Lie S. 和 Scheffers G. 四部巨著外，还可推荐：

[1] Pascal, E.: Gruppi di Transformazioni.

[2] Vivanti, G.: Leçons elémentaires sur la théorie des groups de transformations.

❶ 詳見 D. Hilbert: Gesammelte Abhandlungen, Band III, S. 304～305.

[3] Campbell, J. E.: Introductory Treatise on Lie Theory of Finite Continuous Transformation Groups.

[4] Bianchi, L.: Lezioni sulle teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni.

[5] Kowalewski, G.: Einführung in die Theorie der Kontinuierlichen Gruppen.

以上教程,都各有特点,但因版本較旧,在国内不易找到。

[6] Eisenhart, L. P.: Continuous Groups of Transformations, Princeton, 1933. 有俄譯本, 可能在国内比較容易找到。它的篇幅不大, 而内容却相当丰富,值得一讀。

[7] Chevalley, C.: Theory of Lie Groups. 本书是現在比較流行的著作,但因写得比較抽象,初学者讀起来可能很困难。

[8] Чеботарев, Н. Г.: Теория групп Ли, М-Л. ГТТИ, 1944. 本书对 Lie 群理論闡述得很詳尽,材料丰富,而且处理得很严謹,是一本較好的参考书。

[9] Cohn, P. M.: Lie groups, Cambridge, 1957.

[10] Дынкин, Е. Б.: (中譯本)半单純李代数的結构,科学出版社, 1954.

[11] Schouten, J. A.: Vorlesung über die Theorie der halbeinfachen Kontinuierlichen Gruppen.

[12] Van der Waerden, B. L.: Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen.

有关 Lie 群与几何学方面的书籍,可推荐:

[13] 严志达: 李群和微分几何, 人民教育出版社, 1960. 书中着重介紹紧致 Lie 群和与它相关的复半单純 Lie 代数。在几何学对称 Riemann 空間的观点下討論实半单純 Lie 代数及其分类、自同构等問題。

[14] Каган, В. Ф.: Основания Геометрии, Исторический очерк учения об основаниях геометрии, Одесса, 1907, Том II.

群論在近代物理学中的应用問題, 近年来为国内更多的数学物理工作者所关心。关于这方面, 可以参考本丛书中的有关书籍以及原著中提到的若干日文专著和

[15] Racah, G.: (中譯本) 群論和核譜，高等教育出版社，1959. 該书介紹 Lie 群理論及群表示理論在原子結构問題上的应用。

[16] Любарский, Г. Я.: (中譯本) 群論及其在物理学中的应用，科学出版社，1958。本书系統地論述群表示論及其在理論物理中的应用，是一本很全面的参考书。

[17] Heine, V.: Group theory in quantum mechanics, Pergamon, 1960. 本书介紹群論在量子力学中的主要应用。

此外，还可推举：

[18] Weyl, H.: Gruppen-theorie und Quantenmechanik, S. Hirzel, Leipzig, 1928.

[19] Wigner, E.: Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik des Atomspektren, Vieweg, Braunschweig, 1931.

[20] Van der Waerden, B. L.: Die Gruppentheoretische Method in der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

[21] Bhagavantam, S., Venkatarayudi T.: Theory of Groups and its application to physical problems, Andhra University, 1948.

[22] Higman, B.: Applied group-theoretic and matrix methods, Oxford, 1955.

最后，簡略地介紹一下国內有关方面的工作。解放以来，有关 Lie 群的研究已获得若干可貴的成就[1]。段学复証明了有关代数的 Lie 群、Lie 代数基本定理；馮康研究了最小概周期群問題；严志达、赵嗣元、陈仲沪、郭悦成、丁石孙等人研究了 Lie 代数的分类及构造；关于示性数 p 域上的 Lie 代数，沈光宇、許以超曾获得若干結果；华罗庚、万哲先对 Lie 环进行了研究；华罗庚发展了群表示理論，并富有成效地将其应用于多复变函数論；华罗庚还把群表示論应用于不等式的研究；严志达計算了特殊 Lie 群的 Betti 数；华罗庚、吳光磊、陆启鏗、严志达、陈雅琛等获得了关于 Riemann 流形的若干重要結果；谷超豪等在微分流形及 Lie 群几何学方面

[1] 詳見《十年来的中国科学——数学》，科学出版社，1959。

也做了不少工作。近年来，关于群表示論的物理应用的研究，进展尤为迅速，其中特别有張宗燧等人的工作。

在本书出版之际，略抒所見如上，为学識所限，不免多有欠妥之处，尚希同志們批評指正。